РОССИЙСКО – ТАДЖИКСКИЙ (СЛАВЯНСКИЙ) УНИВЕРСИТЕТ

ДФ НИТУ филиал МИСиС в г. Душанбе

С. З. Курбаншоев

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие

Душанбе - 2021

517.3
УДК 514. 12 (075)
К93

Курбаншоев С.З. Аналитическая геометрия. Учебное пособие. – Душанбе: РТСУ, 2021, стр. 290.

Пособие содержит основы аналитической геометрии и является составной частью комплекса учебных пособий по курсу высшей математики. В учебнике рассматриваются основные разделы аналитической геометрии на плоскости и в пространстве. В начале приводится необходимый теоретический материал, и подробно разъясняется его использование на большом количестве примеров и задач различной трудности, а методы их решения по мере возможности систематизированы. В конце каждой главы помещены задачи для самостоятельного решения с ответами.

В разделе «Приложение» приводится справочный материал по применению аналитической геометрии в экономике.

Рекомендуется для студентов математических, физических, технических и экономических факультетов и лиц, занимающихся самообразованием.

Ответственный редактор Ли И.Р.
Рецензенты:

Н. У. Усмонов – д.ф.м.н., профессор.
А. Э. Сатторов – д.п.н., профессор.

Рекомендовано к печати Редакционно – издательским советом РТСУ, ДФ НИТУ филиал МИСиС в г. Душанбе.

Оглавление

Глава VI. Прямая линия в пространстве

Глава VII. Поверхности второго порядка

Приложение

Элементы аналитической геометрии в экономике

Предисловие

В современном мире математика играет великую роль в теоретических, технических, экономических исследованиях. Она является не только мощным средством для решения прикладных задач и универсальным языком науки, но и элементом общей культуры. Большинство экономических проблем напрямую связано с прогнозированием, оптимизацией, выбором наиболее эффективных решений. В связи с этим математическое образование следует рассматривать как важнейшую составляющую в системе фундаментальной подготовки современного экономиста.

Аналитическая геометрия есть раздел математики, в котором изучаются геометрические образы (точки, линии, поверхности, геометрические фигуры) при помощи алгебры. В основе такого способа изучения геометрических свойств лежит *метод координат*, позволяющий определить любую точку плоскости и пространства несколькими числами (координатами), а линии и поверхности – уравнениями.

Создателем аналитической геометрии является французский математик и философ Декарт (1596-1650), который в своём сочинении «Геометрия» изложил основы этой науки. Другие идеи аналитической геометрии содержатся в работах его последователей.

Методы аналитической геометрии обладают большей общностью и силой. Приступая к изложению аналитической геометрии, мы, ради удобства, делим весь курс на две части. В первой части излагается исследование плоских геометрических форм на плоскости средствами алгебры, основанными на применении координат.

Во второй – аналитическая геометрия в пространстве, где будем аналогично поступать с пространственными геометрическими формами.

В целях большей геометрической наглядности исходные уравнения плоскости и прямой в пространстве даны в векторной форме. Сама глава о векторах и операциях над ними изложена в работе [15].

Предметом аналитической геометрии является исследование геометрических форм аналитическими методами. Положения геометрических объектов изучаются аналитическими средствами (положение точек определяется координатами, положения линий и поверхностей определяются уравнениями).

Преподавание аналитической геометрии на экономических факультетах преследует ознакомление начинающих с определенными общими методами геометрии в экономике и развитие у учащихся необходимых навыков в этой области. Настоящая книга представляет собой руководство, предназначенное для студентов вузов, в которых на курс высшей математики отводится 200-250 часов. Служит учебником для будущих последователей, нуждающихся в более основательной математической подготовке, книга не предназначена. Поэтому автор вопросами строгого логического обоснования, столь важными при построении университетского курса для математиков не занимался.

Пособие построено по принципу «решебника» и содержит подборку задач и примеров, достаточно полно иллюстрирующих традиционный курс аналитической геометрии. В нем с достаточной строгостью и полнотой изложены практически все основные понятия и основы аналитической геометрии. Каждая глава построена следующим образом; в начале дается полный теоретический материал – формулы и определения, а также их доказательства, необходимые для изучения теории и решения задач рассматриваемой главы, затем следуют подробные решения с объяснениями типовых задач с необходимыми указаниями и графической иллюстрацией. Поэтому его можно непосредственно использовать как по прямому назначению, в качестве учебного пособия, так и для самостоятельного изучения курса аналитической геометрии.

Для закрепления основных теоретических материалов и навыков решения задач в качестве самоконтроля читателю предлагаются задачи для самостоятельного решения. Все задачи снабжены ответами.

Настоящее пособие ставит своей целью помочь студентам дневного отделения и студентам – заочникам в приобретении и закреплении навыков самостоятельного решения задач по аналитической геометрии, а также помочь им ознакомиться с имеющимися способами их решения.

Известно, что учебный материал по математике усваивается студентами значительно легче, если он сопровождается достаточно большим числом иллюстрирующих его примеров. Для усвоения учебного материала каждой главы рекомендуется вначале изучить теоретические основы с иллюстрирующими их решениями задачами и примерами, затем разобрать типовые и более сложные задачи с решениями и решить задачи для самостоятельной работы.

В конце каждой главы помещены задачи для самостоятельного решения с ответами.

В разделе «Приложение» приводится справочный материал по применению аналитической геометрии в экономике.

Учебник написан для студентов дневных отделений. Острая нехватка учебников и учебных пособий по математическим дисциплинам болезненно отражается на студентах, обучающихся в вузе без отрыва от производства, для многих из которых учебник является основным источником учебной информации. Именно этим студентам, в первую очередь, адресовано настоящее пособие.

При подготовке данной книги были использованы различные учебные пособия и методические материалы, приведенные в списке литературы.

Настоящий учебник по аналитической геометрии составлен на основании лекций, прочитанных автором на математических отделениях Вузов г. Душанбе, и отражает многолетний опыт его педагогической работы и практикуемые методические приемы подачи учебного материала в наиболее компактной и доступной форме.

Автор приносит искреннюю благодарность рецензентам:
доктору физико-математических наук, профессору Усманову Н. У.,
доктору педагогических наук, профессору Сатторову А. Э.

Особую благодарность автор приносит редактору книги кандидату технических наук, доценту Ли И.Р., который взял на себя нелегкий труд проверки всего учебника, сделав ряд полезных замечаний и этим помог устранить ряд ошибок.

При составлении настоящего пособия автор встретился с немалыми трудностями, которые хорошо известны каждому преподавателю математики и конечно, наш труд не лишен недостатков. Автор с благодарностью примет все замечания и предложения по устранению этих недостатков, которые просит направить по адресу: 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. М. Турсунзаде 30, РТСУ, кафедра математики.

Аналитическая геометрия на плоскости

Глава I. Метод координат плоскости. Простейшие задачи

§ 1.1. Проекции вектора на координатные оси

Решим следующую задачу. Даны две точки $\mathbf{A}_1(x_1, y_1)$ и $\mathbf{A}_2(x_2, y_2)$; тем самым определен вектор $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$. Определить его проекции на оси координат.

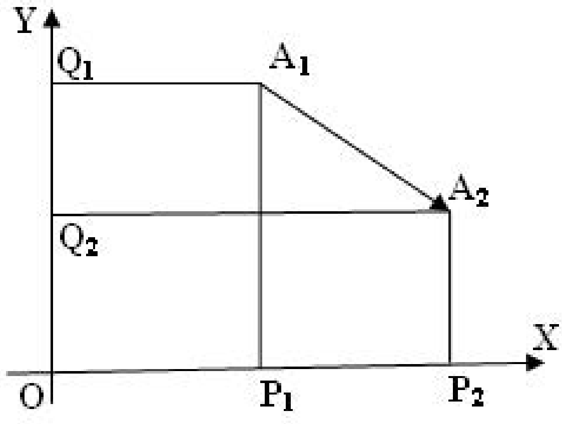


Рис.1.1

Обозначим проекции точек A_1 и A_2 на ось X соответственно через P_1 и P_2, а на ось Y-через Q_1 и Q_2 (Рис.1.1).

Имеем:

$$np_x\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 = P_1P_2.$$

Разбиваем отрезок P_1P_2 на два отрезка при помощи точки O:

$$np_x\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 = OP_2 - OP_1, \quad \text{так как} \quad OP_2 = OP_1 + P_1P_2.$$

Поэтому и

$$np_x\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 = x_2 - x_1,$$

где $|OP_2| = x_2$ и $|OP_1| = x_1$. Аналогично,

$$np_y\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 = Q_1Q_2 = Q_1O + OQ_2 = -OQ_1 + OQ_2 = y_2 - y_1.$$

Итак:

$$\begin{cases} np_x\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 = x_2 - x_1, \\ np_y\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 = y_2 - y_1. \end{cases} \tag{1.1}$$

т.е. проекция вектора на координатную ось равна координате (абсциссе или ординате-смотря на какую ось мы проектируем) конца этого вектора минус координата начала.

Формулы (1.1) справедливы при любом расположении векторов $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$. На рис. 1.1 $y_2 < y_1$, т.е. разность $y_2 - y_1$ отрицательна и проекция вектора $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$ на ось Y отрицательна.

Если точка A_1 совпадает с началом системы координат, то вектор $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$ превращаются в радиус-вектора точки A_2. При этом $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, и формулы (1.1) превращаются в формулы

$$x_2 = np_x\mathbf{OA}_2, \quad y_2 = np_y\mathbf{OA}_2. \tag{1.2}$$

. Длину радиус-вектора $\mathbf{OA}_2$ можно определить по теореме Пифагора

$$r = |\mathbf{OA}_2| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (x = x_2, \quad y = y_2) \tag{1.3}$$

Примеры решения задач

Задача 1. Определить проекции вектора $\mathbf{AB}$ на оси координат, зная координаты начала и конца вектора $A(1, 5)$ и $B(4, -2)$.

Решение. Согласно формулы (1.1) имеем:

$$np_x\mathbf{AB} = x_2 - x_1 = 4 - 1 = 3,$$

$$np_y\mathbf{AB} = y_2 - y_1 = -2 - 5 = -7.$$

Задача 2. Начало вектора находится в точке $A(2, -1)$, его проекции на оси X и Y суть соответственно -4 и 3. Найти конец вектора.

Решение. Пусть конец вектора находится в точке $B(x_2, y_2)$. Тогда согласно формулы (1.1) имеем:

$$np_x\mathbf{AB} = x_2 - x_1 = x_2 - 2 = -4,$$

откуда $x_2 = -4 + 2 = -2$. Аналогично, $np_x\mathbf{AB} = y_2 - y_1 = y_2 + 1 = 3$, откуда $y_2 = 3 - 1 = 2$. Итак конец вектора находится в точке $B(-2, 2)$.

Задача 3. Дана точка (-3,7). Найти точку, симметричную ей: a) относительно оси X; b) относительно оси Y; c) относительно начала координат.

Решение. Если две точки симметричны относительно какой-либо оси, то они лежат на одном перпендикуляре к этой прямой, по разные стороны и на одном расстоянии от нее. Поэтому через току A проведем перпендикуляр AB к оси OX и отложим отрезок BA_1, равный по длине отрезку BA (Рис.1.2.)

а) Так как отрезок BA_1 откладываем в отрицательном направлении оси OX, от $BA_1 = -BA = -7$. Следовательно, координаты точки $A_1(-3, -7)$.

б) Аналогично получаются координаты точки A_2 симметрично точке A относительно оси OY. Итак: $A_2(3, 7)$.

в) Проведем прямую линию через начало координат из точки A. На нее, как на ось симметрии, отложим отрезок OA^1, равный по длине отрезку OA (Рис.1.2). Треугольники AOB и A^1OB^1 равны по гипотенузе и углу, т.е. $< AOB =< A^1OB^1$. Поэтому отрезок $OB = OB^1$ и $BA = B^1A^1$, и противоположны по направлению. Следовательно, координаты точки A^1 будут $x = 3, \quad y = -7$. Итак: $A^1(3, -7)$.

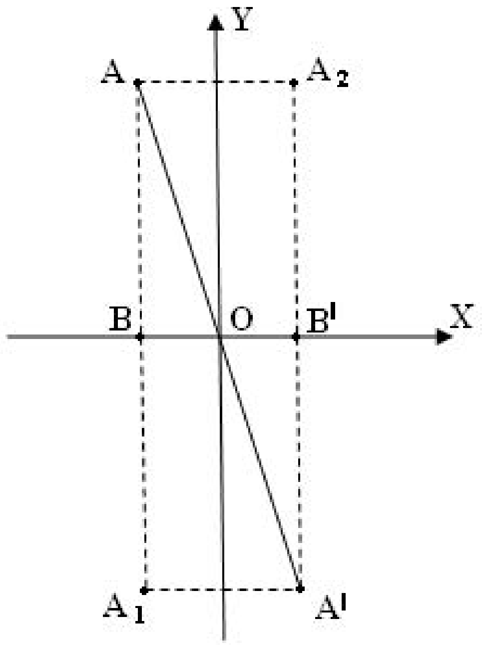


Рис.1.2

Задача 4. Принимая диагонали квадрата со стороной a за оси координат, определить координаты его вершины.

Решение. Из треугольника AOB, согласно условию задачи и теореме Пифагора, имеем: $OA^2 + OB^2 = AB^2$, где $OA = x, \quad OB = y, \quad AB = a$; поэтому $a^2 = x^2 + y^2 = 2x^2$. Откуда, $x = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. Для точки A получаем $A\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}, 0\right)$. Аналогично, для остальных вершин квадрата получаем: $B\left(0, \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)$, $C\left(-\dfrac{a\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ и $D\left(0, -\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)$.

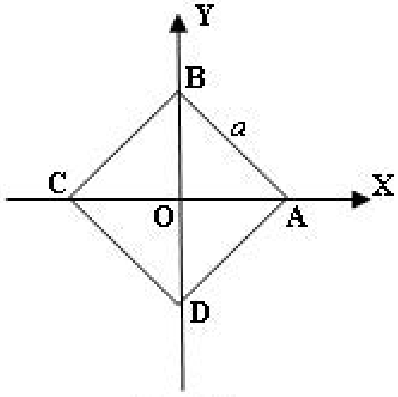


Рис.1.3

§ 1.2. Простейшие задачи, разрешаемые при помощи метода координат

1. **Расстояние между двумя точками**. Решим следующую задачу. Даны две точки $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$; вычислить расстояние между ними.

Обозначим длину A_1A_2 через d. Числа x_1, y_1, x_2, y_2 заданы, d-искомое.

Чтобы найти расстояние d, заметим, что можно построить прямоугольник A_1CA_2B (Рис.1.4), стороны которого равны абсолютным величинам проекций вектора $\mathbf{A_1A_2}$ на координатные оси, а диагональ является A_1A_2. Следовательно, согласно теореме Пифагора

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{1.4}$$

Формула (1.4) дает расстояние между двумя точками. Это расстояние не зависит от того, что какую точку считать первой и какую второй. Итак, *расстояние между двумя точками равно квадратичному корню из разности их абсцисс в квадрате плюс разность ординат в квадрате*.

Если точка A_1 совпадает с началом системы координат, то $x_1 = 0, \quad y_1 = 0$ и формула (1.4) дает расстояние точки A_2 от начала, т.е. длину радиуса-вектора A_2 (см. формулу (1.3)).

2. **Наклон вектора к координатным осям**. Пусть даны две точки $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$ (Рис.1.4). Найдем углы наклона вектора $\mathbf{A_1A_2}$ к координатным осям.

Из треугольника A_1A_2B (Рис.1.4) следует, что

$$np_x\mathbf{A_1A_2} = d\cos\varphi,$$

где φ-угол наклона вектора A_1A_2 к оси X. Далее, согласно формулам (1.1)

$$np_x\mathbf{A_1A_2} = x_2 - x_1.$$

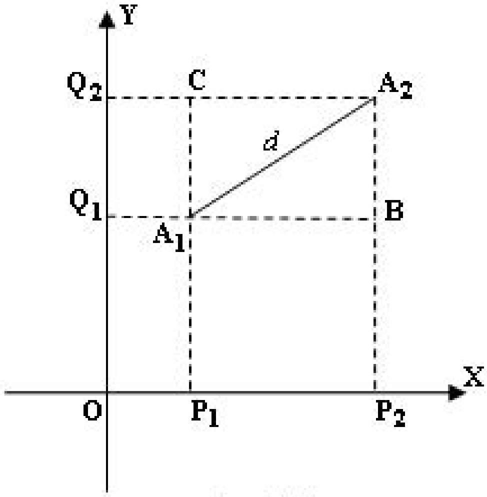


Рис.1.4

Приравнивая эти два выражения

$$d\cos\varphi = x_2 - x_1,$$

откуда

$$\cos\varphi = \frac{x_2 - x_1}{d}.$$

Аналогично, проектируя вектор $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$ на ось Y, мы нашли бы

$$\sin\varphi = \frac{y_2 - y_1}{d},$$

где φ-угол наклона вектора $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$ к оси Y. Поскольку $\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\varphi$, то окончательно получим

$$\cos\varphi = \frac{x_2 - x_1}{d}, \quad \sin\varphi = \frac{y_2 - y_1}{d}, \tag{1.5}$$

где d определяется по формуле (1.4).

Если вектор $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$ заменить противоположным вектором $\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1$, то косинус и синус в формулах (1.5) изменят знаки. Геометрически это объясняется тем, что если вектор $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$ наклонен к оси X под углом φ, то противоположный вектор $\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1$ образует с осью X угол $180^0 + \varphi$, и

$$\cos\left(180^0 + \varphi\right) = -\cos\varphi, \quad \sin\left(180^0 + \varphi\right) = -\sin\varphi.$$

Деля вторую формулу (1.5) на первую, получим:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{1.6}$$

В формуле (1.6) изменение порядка индексов не влияет на $\operatorname{tg}\varphi$, так как

$$\operatorname{tg}\left(180^0 + \varphi\right) = \operatorname{tg}\varphi.$$

Следовательно, формула (1.6) одинаково относится и к вектору $\mathbf{A_1A_2}$ и к вектору $\mathbf{A_2A_1}$ она определяет наклон к оси X отрезка $\mathbf{A_1A_2}$.

Тангенс угла наклона отрезка к оси X называется *угловым коэффициентом* отрезка. Формула (1.6) дает угловой коэффициент отрезка $\mathbf{A_1A_2}$, т.е. $\operatorname{tg}\varphi = k$.

Примеры решения задач

Задача 5. Определим вид треугольника ABC (т.е. выяснить, является ли он остроугольным, прямоугольным или тупоугольным): $A(4,2), \quad B(7,1), \quad C(3,6)$.

Решение. Определим длины сторон треугольника ABC, для чего используем формулу (1.4)-расстояния между двумя точками. Тогда

$$AB = \sqrt{(7-4)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{10},$$

$$AC = \sqrt{(3-4)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{17},$$

$$BC = \sqrt{(3-7)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{41}.$$

Рассмотрим соотношение между квадратами сторон треугольника ABC; $AB^2 = 10, \quad AC^2 = 17, \quad BC^2 = 41, \quad AB^2 + AC^2 = 27, \quad 41 > > 27, \quad$ т.е. $\quad BC^2 > AB^2 + AC^2$.

Так как квадрат большей стороны (BC) больше суммы квадратов двух меньших сторон (AB и AC), то эта большая сторона лежит против тупого угла. Следовательно, $\angle BAC$-тупой.

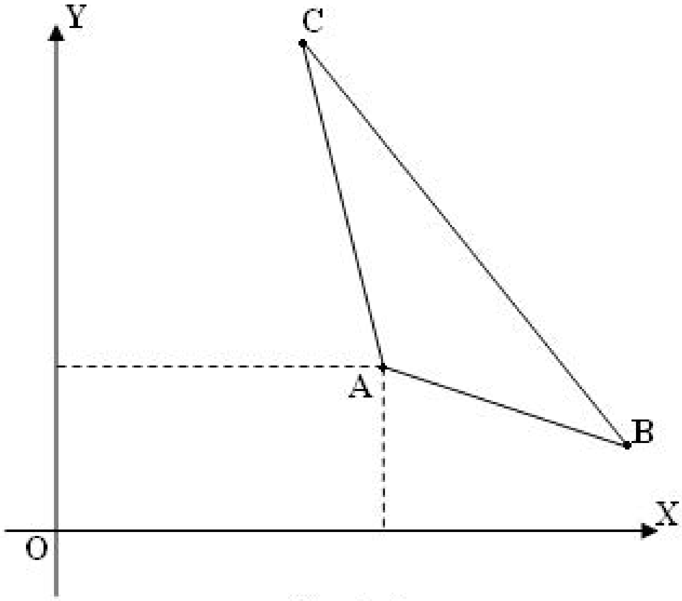


Рис.1.5

Задача 6. Зная расстояние AB, определить неизвестную координату точки A :

$$A(2, y), \quad B(3, 5), \quad AB = 10.$$

Решение. Расстояние между точками A и B равно:

$$AB = \sqrt{(3-2)^2 + (5-y)^2} = 10.$$

Решая данное уравнение, получаем:

$$1 + (5-y)^2 = 10, \quad y^2 - 10y + 16 = 0,$$

$$y_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25-16} = 5 \pm \sqrt{9} = 5 \pm 3,$$

$$y_1 = 2, \quad y_2 = 8.$$

Это показывает, что существуют две точки, отстоящие от точки B на расстоянии 10 ед. Эти точки $A_1(2;2)$ и $A_2(2,8)$.

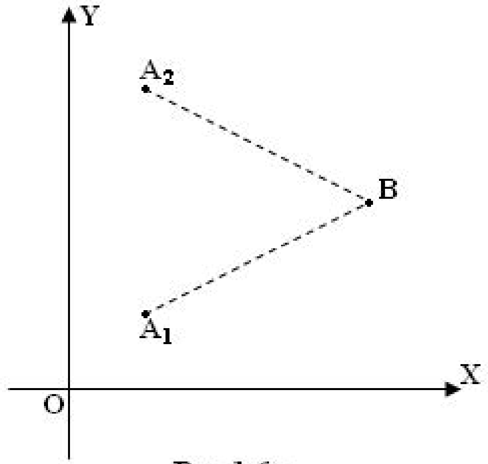


Рис.1.6 а

Задача 7. Найти центр окружности, описанной около треугольника ABC;

$$A(5, 2) \quad B(-4, 5) \quad C(-2, 1).$$

Решение. Построим треугольник ABC и сделаем эскиз окружности. Пусть точка $K(x, y)$-есть центр искомой окружности. Тогда по условию задачи $AK = BK = CK$. По формуле (1.4) имеем:

$$AK = \sqrt{(x-5)^2 + (y-2)^2},$$

$$BK = \sqrt{(x+4)^2 + (y-5)^2},$$

$$CK = \sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2}.$$

Следовательно,

$$(x+5)^2 + (y-2)^2 = (x+4)^2 + (y-5)^2,$$

$$(x+5)^2 + (y-2)^2 = (x+2)^2 + (y-1)^2.$$

Упростив уравнения, получим;

$$\begin{cases} -18x + 6y = 12, \\ 14x + 2y = 24 \end{cases} \implies \begin{cases} -3x + y = 2, \\ 7x + y = 12, \end{cases}$$

откуда $x = 1,$ и $y = 5$.

Итак, искомый центр есть $K(1,5)$.

Проверим полученное решение. Для этого находим:

$$AK = \sqrt{(1-5)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5.$$

$$BK = \sqrt{(1+4)^2 + (5-5)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Мы видим, что три вершины треугольника ABC находятся на одном и том же расстояния, равном 5, от точки $K(1,5)$, т.е. лежат на окружности с центром в точке K (Рис.1.6).

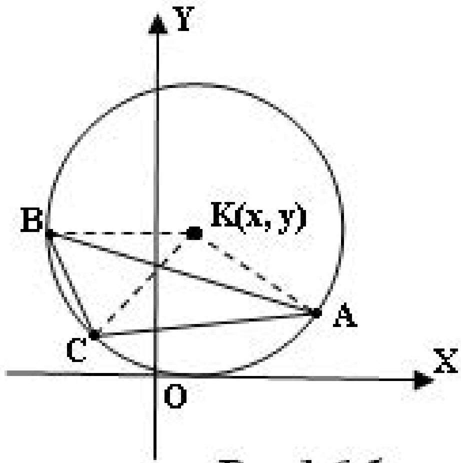


Рис.1.6 б

Задача 8. Определить тангенс угла наклона вектора **AB** к оси X, зная координаты его начала и конца (Рис. 1.7).

$$A(2,-1) \quad B(-2,2).$$

Решение.

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2+1}{-2-2} = -\frac{3}{4}; \quad \operatorname{tg}\varphi = -\frac{3}{4}.$$

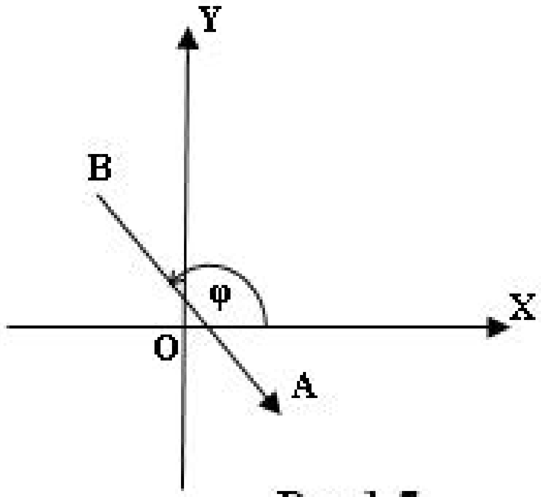


Рис.1.7

Задача 9. Из точки $A(-3,1)$ выходит вектор **AB**, длина которого равна $\sqrt{2}$. Найти конец вектора, зная, что этот вектор наклонен к оси X под углом 135^0.

Решение. Для решения этой задачи воспользуемся формулами:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Обозначим искомую точку $B(x,y)$, тогда

$$\begin{cases} AB = \sqrt{(x+3)^2 + (y-1)^2}, \\ \operatorname{tg} 135^0 = \frac{y-1}{x+3}; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sqrt{(x+3)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{2}, \\ \frac{y-1}{x+3} = -1. \end{cases}$$

Решим полученную систему;

$$\begin{cases} (x+3)^2 + (y-1)^2 = 2, \\ y - 1 = -x - 3, \end{cases} \qquad \begin{gathered} (x+3)^2 + (x+3)^2 = 2, \\ 2(x+3)^2 = 2, \end{gathered}$$

$$x + 3 = \pm 1, \; x_1 = -4, \; x_2 = -2.$$

$$y = -x - 2; \; y_1 = 2, \; y_0 = 0; \; B_1(-4,2), \; B_2(-2,0).$$

Следовательно, существуют две точки, удовлетворяющие условию задачи (Рис. 1.8).

Ответ: $B_1(-4,2), \; B_2(-2,0)$.

3. Деление отрезка в данном отношении. Формулировка задачи: даны две точки $A_1(x_1,y_1)$и $A_2(x_2,y_2)$. Найти точку $B(x,y)$, лежащую на отрезке A_1A_2 и делящую его в отношении λ (т.е. $\frac{A_1B}{BA_2} = \lambda$). Здесь данные числа: x_1, y_1, x_2, y_2 и λ, а искомые x и y.

Проектируем точки A_1, A_2 и B на ось X (Рис.1.9). Обозначим проекции соответственно P_1, P_2 и P. Из элементарный геометрии известно, что если

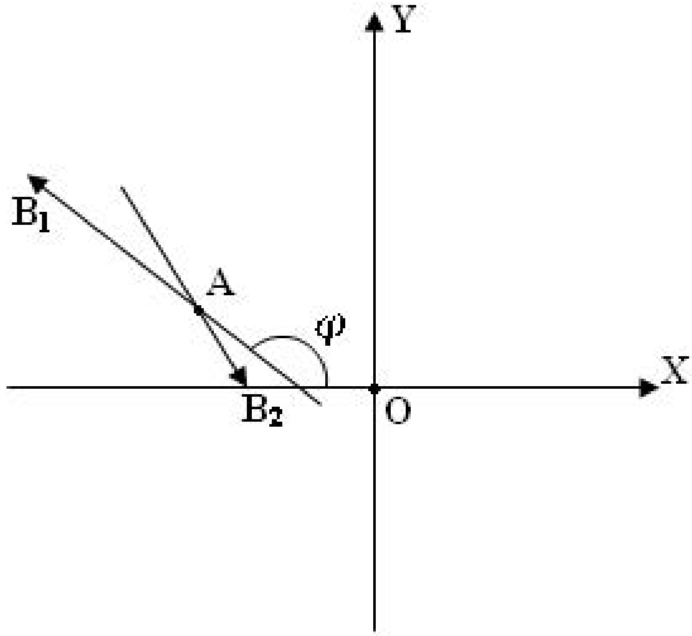


Рис.1.8

какие-нибудь прямые пересекаются, то эти параллельные прямые отсекают на них пропорциональные отрезки. Значит,

$$\frac{P_1P}{PP_2} = \frac{A_1B}{BA_2}, \tag{1.7}$$

Мы предполагали, что точка B лежит внутри отрезка A_1A_2. При этом точка P также лежит внутри отрезка P_1P_2. Отрезки A_1B и BA_2 имеют одинаковое направление, и поэтому отношение $\lambda = \frac{A_1B}{BA_2}$ положительно, независимо от того, какое направление установлено на прямой A_1A_2. Отношение $\frac{P_1P}{PP_2}$ тоже положительно.

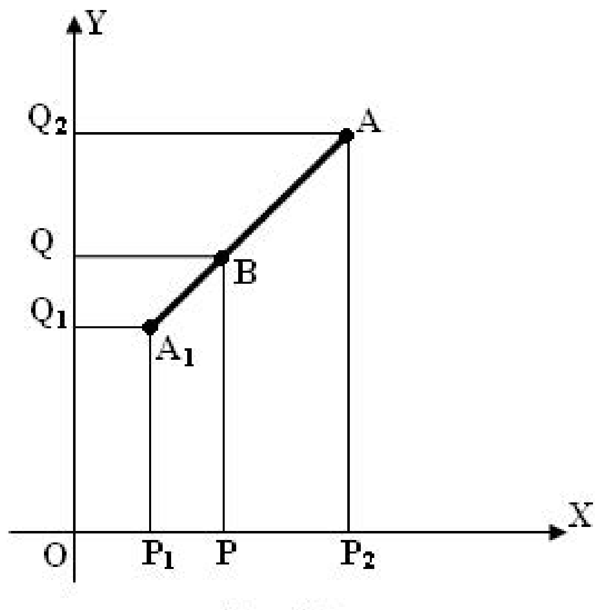


Рис.1.9

Отрезки P_1P и PP_2 суть проекции на ось X векторов $\mathbf{A_1B}$ и $\mathbf{BA_2}$. Выражая их по формуле (1.1), можно записать последнюю пропорцию так:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda.$$

Откуда находя x, получим:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}.$$

Аналогично этому, имеем:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y} = \lambda, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Таким образом, получаем следующие формулы:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \quad (\lambda \neq -1) \tag{1.8}$$

Если точка B совпадает с точкой A_1, то считается, что $\lambda = 0$. Если точка B совпадает с точкой A_2, то отношение не определено $\lambda = \infty$. Для точек B, лежащих внутри отрезка A_1A_2, отношение λ положительно, для точек B, лежащих на прямой вне отрезка $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$, отношение λ отрицательно.

Так как точки A_1 и A_2 различны, то не существует точки B, для которой $\lambda = -1$. На самом деле, если $\lambda = -1$, то

$$-1 = \frac{x - x_1}{x_2 - x}, \quad \text{т.е.} \quad x_1 = x_2,$$

что противоречит самой постановке задачи (отрезок $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$-не нулевой)

Если точка B есть середина отрезка, то $\lambda = 1$. Полагая в формулах (1.8) $\lambda = 1$, получаем:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \tag{1.9}$$

Абсцисса (ордината) середины отрезка есть среднее арифметическое абсцисс (ординат) его концов.

Примеры решения задач

Задача 10. На концах стержня, массой которого можно пренебречь, помещены две массы; в точке $A(-2, 4)$ масса в 3г и в точке $B(10, -2)$ масса в 7г. Найти центр тяжести этой системы.

Решение. Центр тяжести лежит на отрезке между точками A и B и делит этот отрезок на части, обратно пропорциональные массам, сосредоточенным на его концах, т.е. $\lambda = \frac{7}{3}$.

Следовательно,

$$x = \frac{-2 + \frac{7}{3} \cdot 10}{1 + \frac{7}{3}} = \frac{-6 + 70}{3 + 7} = \frac{64}{10} = 6,4.$$

$$y = \frac{4 + \frac{7}{3} \cdot (-2)}{1 + \frac{7}{3}} = \frac{12 - 14}{3 + 7} = -\frac{2}{10} = -0,2.$$

Ответ: (6,4;0,2).

Задача 11. Точка $C(0;2)$ делит отрезок между $A(-2;1)$ и $B(x;y)$ в отношении $\frac{1}{5}$. Найти координаты точки B.

Решение. По формуле (1.8) находим координаты точки B :

$$x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1 + \lambda}; \quad y_C = \frac{y_A + \lambda y_B}{1 + \lambda}.$$

откуда имеем:

$$0 = \frac{-2 + \frac{1}{5} \cdot x_B}{1 + \frac{1}{5}} = \frac{-10 + x_B}{6}, \quad \text{или} \quad x_B = 10,$$

$$2 = \frac{1 + \frac{1}{5} \cdot y_B}{1 + \frac{1}{5}} = \frac{5 + y_B}{6}, \quad \text{или} \quad y_B = 12 - 5 = 7.$$

Итак, координаты точки $B(10;7)$.

Задача 12. Найти центр тяжести однородной треугольной пластинки с вершинами $A(2,3)$, $B(-10,-4)$ и $C(2,-8)$.

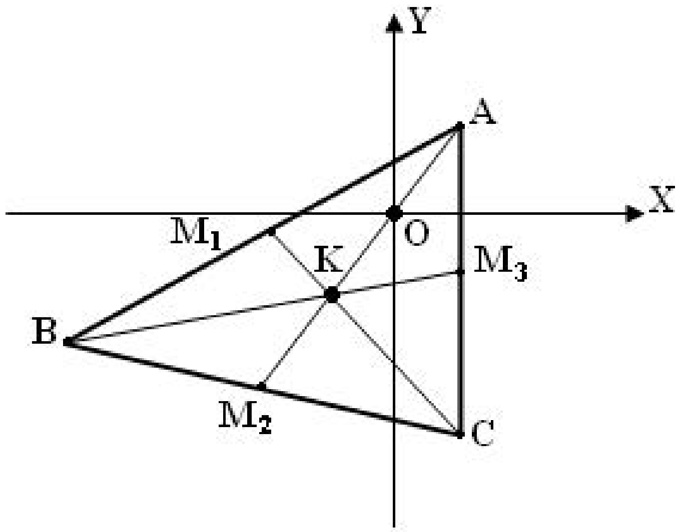


Рис.1.10

Решение. Координаты точки $K(x,y)$, как центра тяжести треугольника (Рис.1.10), определяются по формулам:

$$x_K = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \quad y_K = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

$$x_K = \frac{2-10+2}{3} = -2; \quad y_K = \frac{3-4-8}{3} = -3; \quad K(-2;-3).$$

Задача 13. Зная три вершины параллелограмма $ABCD$ $A(4,3)$, $B(-3,-1)$, $C(-1,3)$, найти вершину D, противоположную B.

Решение. Диагоналями этого параллелограмма (Рис.1.11) являются AC и BD.

Находим координаты точки K, которая является серединой AC и BD. По формулам (1.9), имеем:

$$x_K = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{4-1}{2} = \frac{3}{2},$$

$$y_K = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-3+3}{2} = 0; \quad K\left(\frac{3}{2}, 0\right).$$

С другой стороны, опять же по формуле (1.9) имеем:

$$x_K = \frac{x_B + x_D}{2}, \quad \text{откуда} \quad x_D = 2x_K - x_B = 2 \cdot \frac{3}{2} + 3 = 6,$$

$$y_D = 2y_K - y_B = 2 \cdot 0 + 1 = 1.$$

Ответ: $D(6;1)$.

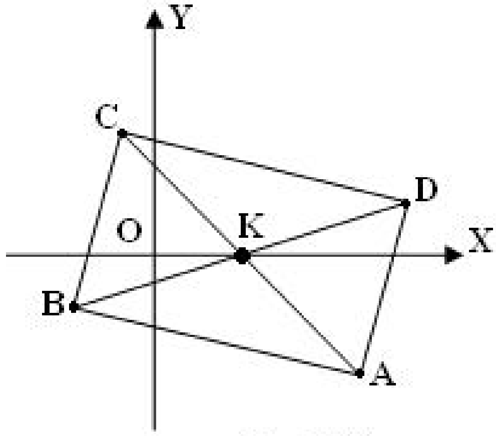


Рис.1.11

4. Площадь треугольника. Решаем следующую задачу: даны точки $A(x_1, y_1,)$ $B(x_2, y_2)$ $C(x_3, y_3)$. Найти площадь треугольника ABC.

Решение. Опустим из точек A, B, C перпендикуляры на ось OX (Рис.1.12). В результате получится многоугольник A_1ACBA_2, который составлен из трапеций $A_1A_3CA_2$ и A_3A_2BC. Поэтому;

$$S_{\Delta_{ABC}} = S_{A_1ACBA_2} - S_{A_1ABA_2}, \tag{1.10}$$

но

$$S_{A_1ACBA_2} = S_{A_1ACA_3} + S_{A_3CBA_2}.$$

Известно, что площадь трапеций

$$S_{A_1ACA_3} = \frac{y_1 + y_3}{2} \cdot (x_3 - x_1),$$

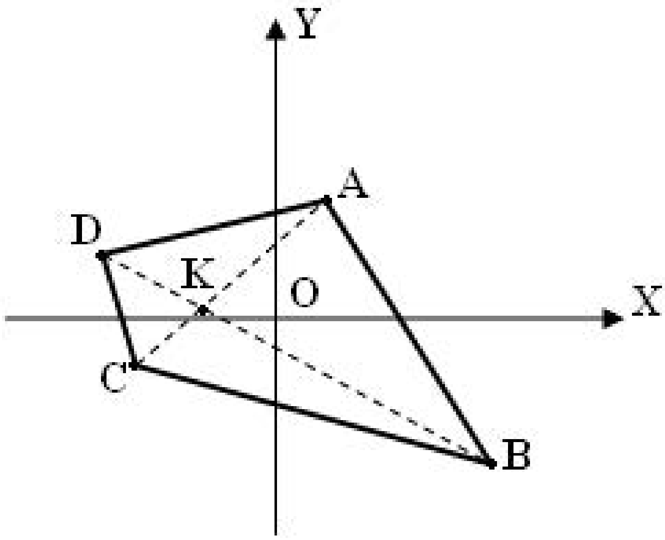


Рис.1.12

Задача 14. Даны координаты вершин четырехугольника $ABCD$:

$$A(1,5), B(8,-5), C(-2,-1), D(-4,3).$$

Найти точку пересечения диагоналей.

Решение. Пусть точка K (Рис.1.12) делит отрезок BD в отношении t, а отрезок AC в отношении s. Тогда имеем:

$$x_K = \frac{x_B + t \cdot x_D}{1+t} = \frac{8-4t}{1+t}, \quad x_K = \frac{x_A + s \cdot x_C}{1+s} = \frac{1-2s}{1+s},$$

$$y_K = \frac{y_B + t \cdot y_D}{1+t} = \frac{-5+3t}{1+t}, \quad y_K = \frac{y_A + s \cdot y_C}{1+s} = \frac{5-s}{1+s}.$$

Из системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{8-4t}{1+t} = \frac{1-2s}{1+s}, \\ \frac{-5+3t}{1+t} = \frac{5-s}{1+s} \end{cases}$$

находим $t = 3, s = 2$.

Тогда

$$x_K = \frac{x_A + s \cdot x_C}{1+s} = \frac{1 + 2 \cdot (-2)}{1+2} = -1,$$

$$y_K = \frac{y_A + s \cdot y_C}{1+s} = \frac{5 + 2 \cdot (-1)}{3} = 1.$$

Итак координаты точки K равны $x = -1, y = 1$, т.е. $K(-1,1)$.

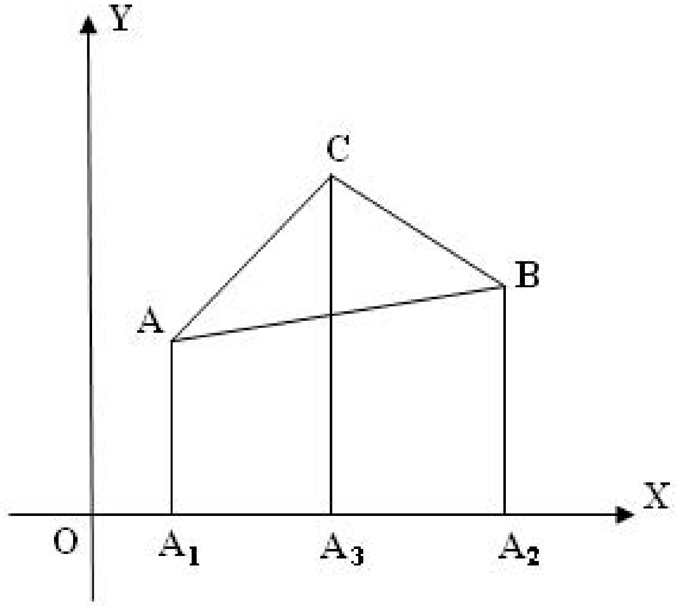


Рис.1.13

Задача 15. Найти центр тяжести четырехугольника задачи 14, рассматриваемого как однородная пластинка.

Решение. Центр тяжести однородной четырехугольной пластинки лежит на прямой, проходящей через точки пересечения медиан треугольника, на которые четырехугольник разбивается его диагональю.

Проведя диагональ AC, четырехугольник разбивается на два треугольника ACD и ABC. Находим центр тяжести этих треугольники. Пусть точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ центры тяжести треугольники ACD и ABC соответственно. Тогда имеем:

$$x_{M_1} = \frac{x_A + x_C + x_D}{3} = \frac{1-2-4}{3} = -\frac{5}{3},$$

$$y_{M_1} = \frac{y_A + y_C + y_D}{3} = \frac{5-1+3}{3} = \frac{7}{3}; \quad M_1\left(-\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right).$$

Аналогично, для треугольника ABC, находим координаты точки его центра тяжести:

$$x_{M_2} = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{1+8-2}{3} = \frac{7}{3}; \quad y_{M_2} = \frac{5-5-1}{3} = -\frac{1}{3}; \quad M_2\left(\frac{7}{3}; -\frac{1}{3}\right)$$

Проведя диагональ BD, для треугольники BCD и ABD находим их точки центра тяжести M_3 и M_4 соответственно.

$$x_{M_3} = \frac{x_B + x_C + x_D}{3} = \frac{8-2-4}{3} = \frac{2}{3}, \quad y_{M_3} = \frac{-5-1+3}{3} = -1; \quad M_3\left(\frac{2}{3}, -1\right),$$

$$x_{M_4} = \frac{x_A + x_B + x_D}{3} = \frac{1+8-4}{3} = \frac{5}{3}, \quad y_{M_4} = \frac{5-5+3}{3} = 1; \quad M_4\left(\frac{5}{3}, 1\right).$$

Поскольку $M_1, K(x,y), M_2$ и $M_3, K(x,y), M_4$, где $K(x,y)$-точка центра тяжести четырехугольника $ABCD$, то используя для них условие на одной прямой лежащие три точки, имеем:

Для прямой M_1M_2.

$$\begin{vmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{7}{3} & 1 \\ x & y & 1 \\ \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{8}{3}x - \frac{12}{3}y + \frac{44}{9} = 0, \quad \text{или} \quad 6x + 9y - 11 = 0,$$

для прямой M_3M_4 будем имеем:

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & -1 & 1 \\ x & y & 1 \\ \frac{5}{3} & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2x - y - \frac{7}{3} = 0 \quad \text{или} \quad 6x - 3y - 7 = 0.$$

Решая совместно систему уравнений

$$\begin{cases} 6x + 9y = 11, \\ 6x - 3y = 7, \end{cases}$$

находим $x = \frac{4}{3}, y = \frac{1}{3}$.

Ответ: $K\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

$$S_{A_3CBA_2} = \frac{y_2 + y_3}{2}(x_2 - x_3),$$

$$S_{A_1ABA_2} = \frac{y_1 + y_2}{2}(x_2 - x_1)$$

Представляя полученные выражения в равенстве (1.10), имеем:

$$S_\Delta = \frac{y_1 + y_3}{2}(x_3 - x_1) + \frac{y_2 + y_3}{2}(x_2 - x_3) + \frac{y_1 + y_2}{2}(x_2 - x_3).$$

Раскрыв скобки и приведя подобные члены, получим:

$$S_\Delta = \frac{1}{2}[(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (y_1x_2 + y_2x_3 + y_3x_1)] \tag{1.11}$$

Данную формулу можно записать и иначе:

$$S = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]. \tag{1.12}$$

В данной формуле каждое последующее слагаемое в квадратных скобках можно получить из предыдущего циклической перестановкой букв x и y (Рис.

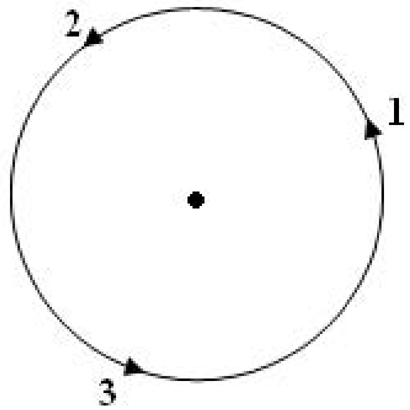


Рис.1.14

1.14). Формулы (1.11) и (1.12) получены при положительном обходе треугольника ABC. Если обход вершин A, B, C производится по часовой стрелке, то перед формулами (1.11) и (1.12) берется знак минус.

Таким образом, при помощи определителей полученные формулы запишутся так:

$$S_{\Delta} = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix}, \tag{1.13}$$

$$S_{\Delta} = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}. \tag{1.14}$$

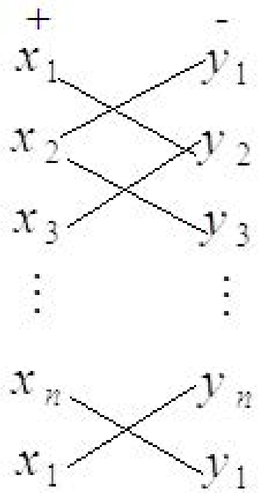
Если значение определителя в формуле (1.14) будет равно нулю, то отсюда следует, что точки $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ лежат на одной прямой линии.

Если вершины $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \ldots, M_n(x_n, y_n)$ n-го многоугольника обходятся против хода часовой стрелки, то справедливы следующие формулы:

$$S_{M_1M_2\ldots M_n} = \frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \cdots \begin{vmatrix} x_{n-1} & y_{n-1} \\ x_n & y_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right), \tag{1.15}$$

$$S_{M_1M_2\ldots M_n} = \frac{1}{2}\left[(x_1y_2 + x_2y_3 + \cdots + x_ny_1) - (y_1x_2 + y_2x_3 + \cdots + y_nx_1)\right], \tag{1.16}$$

Для вычисления выражения, стоящего в формулах (1.11) и (1.16) в скобках, надо выписать в столбец координаты первой, второй и т.д. n-ой, и снова первой вершин многоугольника и произвести перемножение по схеме, расставив знаки, по правилам вычисления определителей второго порядка, т.е.:



Примеры решения задач

Задача 16. Вычислить площадь треугольника $A(1,1)$, $B(5,2)$, $C(3,4)$.

Решение. По формулам (1.13) получим

$$S_\Delta = \left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 5-1 & 2-1 \\ 3-1 & 4-1 \end{vmatrix} \right| = \left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \right| = 5 \text{ кв. ед.}$$

Решая данную задачу по формуле (1.15), имеем

$$S = \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = 5 \text{ кв. ед.}$$

Данная формула получена согласно выше изложенной схеме.

Задача 17. Вычислить площадь четырехугольника $A(1,2), B(5,1), C(4,3), D(2,4)$.

Решение. Построив четырехугольник $ABCD$, вычислим его площадь по формуле (1.15):

$$S = \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) = 6 \text{ кв. ед.}$$

Задача 18. На оси Y найти точку, образующую с точками $A(4,1)$ и $B(-3,2)$ треугольник, площадь которого равна 12.

Решение. Обозначим третью вершину, лежащую на оси O_x, через $C(o,y)$. По формуле (1.14) получим:

$$S = \pm\frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad y_3 = y, \quad x_3 = 0,$$

$$12 = \pm\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 0 & y & 1 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{2}(8 - 3y - 4y + 3)$$

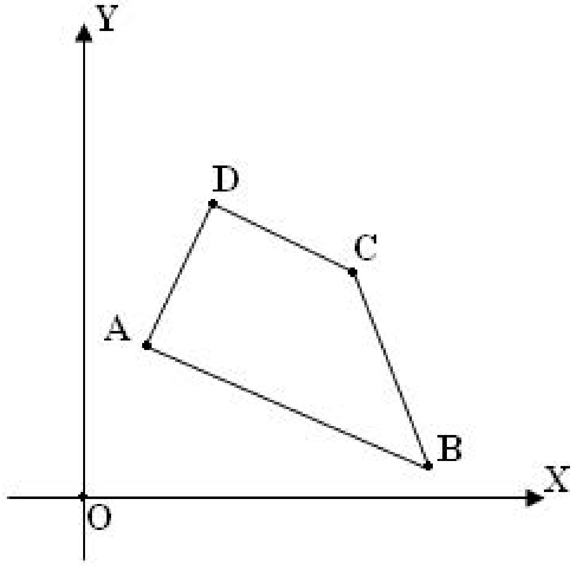


Рис.1.15

или $12 = \pm\frac{1}{2}(11 - 7y)$.

Если в полученном уравнении в правой части перед скобками взять знак плюс, т.е. $12 = \frac{1}{2}(11 - 7y)$, то получим $y = -\frac{13}{7}$. Если же взять знак минус, т.е. $12 = -\frac{1}{2}(11 - 7y)$, то получим $y = 5$.

Таким образом, третья вершина треугольника находится в точке $C_1\left(0, -\dfrac{13}{7}\right)$ или в точке $C_2(0, 5)$.

Ответ: $C_1\left(0, -\dfrac{13}{7}\right)$ $C_2(0, 5)$.

Задача 19. В треугольнике $A(2, -1)$, $B(0, 1)$, $C(-4, -3)$ найти длину биссектрисы угла B.

Решение. Из элементарной геометрии известно, что биссектриса делит противолежащую сторону треугольника на части, пропорциональные длинам прилежащих сторон.

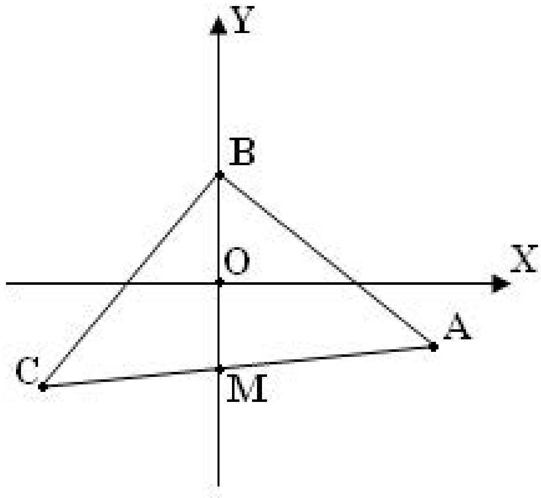


Рис.1.16

Другими словами, точка M (1.16) делит отрезок AC в отношении AM :

$: MC = AB : BC = \lambda.$

Так как
$$AB = \sqrt{(2-0)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2},$$
$$BC = \sqrt{(0+4)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2},$$
то $\lambda = AB : BC = \frac{1}{2}$. По формулам (1.8) найдем координаты точки M :
$$x_M = \frac{x_A + \lambda x_C}{1+\lambda} = \frac{2 + \frac{1}{2}\cdot(-4)}{1+\frac{1}{2}} = \frac{4-4}{3} = 0,$$
$$y_M = \frac{y_A + \lambda y_C}{1+\lambda} = \frac{-1 + \frac{1}{2}\cdot(-3)}{1+\frac{1}{2}} = -\frac{5}{3}; \quad M\left(0, -\frac{5}{3}\right).$$
Следовательно, длина биссектрисы
$$BM = \sqrt{0 + \left(1 + \frac{5}{3}\right)^2} = \frac{8}{3}.$$

Ответ: $\frac{8}{3}$.

§ 1.3. Полярная система координат

Для определения положения точки на плоскости, кроме декартовой прямоугольной системы координат, довольно часто применяется полярная система координат.

Пусть на плоскости дана некоторая точка O и проходящая через нее ось OP. Точка O называется полюсом, а полупрямая OP называется полярной осью. Задание полюса O, полярной оси OP и единичного (масштабного) отрезка OE определяет на *плоскости полярную систему координат* (Рис.1.17).

Полярным радиусом любой точки M плоскости называется ее расстояние от полюса O, т.е. длина отрезка $\mathbf{OM}$ и обозначается $r = |\mathbf{OM}|$.

Угол наклона радиус-вектора $\mathbf{OM}$ с полярной оси OP называется *полярным углом* и обозначается буквой φ. Угол φ определяется с учетом знака и с точностью до слагаемого вида $2\pi k$, где K-целое число. Обычно в качестве полярного угла φ ,берут так называемые главные их значения в пределах $0 \le \varphi < 2\pi$ (или $-\pi < \varphi \le \pi$.)

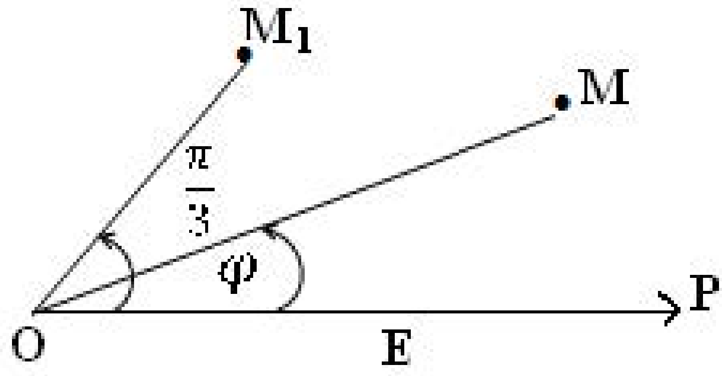


Рис.1.17

Полярный угол и длина радиус-вектора точки M называются *полярными координатами* точки M. Точка M с полярными координатами r и φ обозначается $M(r, \varphi)$.

Таким образом, любой точке M плоскости (кроме полюса) соответствует определенная пара действительных чисел-ее полярных координат.

Задание любой пары действительных чисел (r, φ), $\quad r \geq 0$ позволяет построить на плоскости одну и только одну точку M, для которой эти числа являются ее полярными координатами. Если $r = 0$, то точка M совпадает с полюсом O и угол φ при этом не имеет определенного значения.

Задача 20. Построить на плоскости точку $M_1\left(4, \dfrac{\pi}{3}\right)$.

Решение. Проведем через полюс O полуось под углом $\frac{\pi}{3}$ к полярной оси против часовой стрелки, затем отложим на полученной оси от полюса O отрезок длины, равный 4. Его конец-точка M_1 (1.17).

Выведение обобщенной полярной системы координат позволяет каждой паре действительных чисел поставить в соответствие одну определенную точку плоскости.

Можно установить связь между декартовыми и полярными координатами одной и той же точки. Пусть даны декартова система координат и полярная с полюсом в начале координат и полярной осью, совпадающие с осью абсцисс (Рис.1.18). Обозначим через x и y декартовы координаты произвольной точки M, через r и φ-ее полярные координаты.

Так как

$$\cos\varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{r},$$

то

$$x = r \cdot \cos\varphi, \quad y = r \cdot \sin\varphi. \tag{1.17}$$

Формулы (1.17) выражают прямоугольные декартовы координаты точки

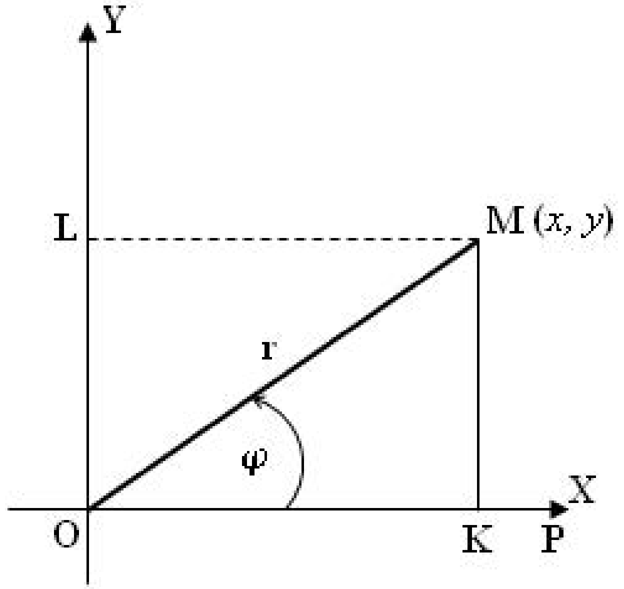


Рис.1.18

M через ее полярные координаты. Чтобы найти полярные координаты точки, зная ее декартовы координаты, возведем обе части каждого из равенств (1.17) в квадрат и затем сложим их почленно, получим:

$$x^2 + y^2 = r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi),$$

т.е. $r^2 = x^2 + y^2$,

следовательно,

$$r = +\sqrt{x^2+y^2}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{1.18}$$

Знак $+$ перед радикалом напоминает, что r-величина существенно положительная.

Если точка M не лежит на оси OY, то из формул (1.18) следует, что

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}. \tag{1.19}$$

По формуле (1.19) определяется тангенс полярного угла φ. При этом получаются два значения φ, лежащие в разных четвертях. Так как $y = r\sin\varphi$, то из этих двух значений угла φ нужно выбрать то, для которого синус имеет тот же знак, что и φ.

Примеры решения задач

Задача 21. Даны декартовы координаты точки $M(-1, -\sqrt{3})$. Найти полярные координаты.

Решение. По формулам (1.18) и (1.19) имеем:

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2, \quad \operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3}.$$

Из двух значений $\varphi = \frac{7\pi}{6}$ и $\varphi = -\frac{5\pi}{6}$ нужно взять $\varphi = -\frac{5\pi}{6}$, так как $\sin\varphi$ в данном случае должен иметь отрицательный знак. Точка M находится в третьей четверти декартовой системы координат.

Задача 22. Вычислить площадь треугольника $A_1A_2A_3$ с координатами $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(0, 0)$.

Решение. Пусть полярные координаты точек A_1 и A_2 будут $A_1(r_1, \varphi_1)$ $A_2(r_2, \varphi_2)$ соответственно относительно полярной системы координат (Рис. 1.19).

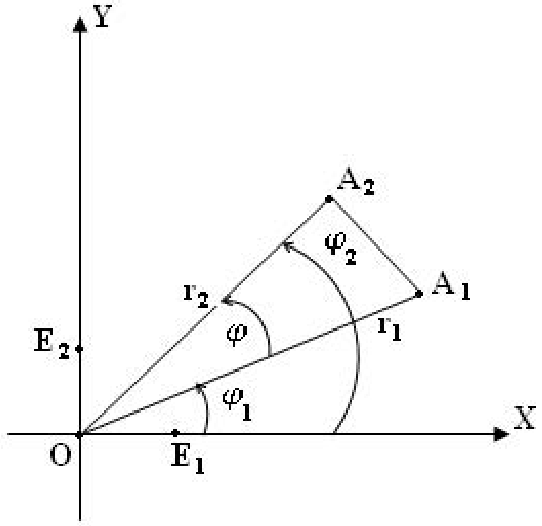


Рис.1.19

Согласно формуле площади треугольника

$$S = \frac{1}{2}r_1 \cdot r_2 \cdot \sin\varphi = \frac{1}{2}r_1 \cdot r_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{1}{2}r_1 \cdot r_2(\sin\varphi_2 \cdot \cos\varphi_1 - \sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2),$$

но

$$r_1 \cos\varphi_1 = x_1, \quad r_1 \sin\varphi_1 = y_1, \tag{1.20}$$

$$r_2 \cos\varphi_2 = x_2, \quad r_2 \sin\varphi_2 = y_2,$$

следовательно,

$$S = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}. \tag{1.21}$$

Задача 23. Определить расстояния между точками $A_1(\rho_1, \varphi_1)$ и $A_2(\rho_2, \varphi_2)$, заданными полярными координатами (Рис.1.19).

Решение. Согласно формуле расстояния между двумя точками в прямоугольных координатах

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

и подставляя в ней значения равенств (1.20), получим:

$$d=\sqrt{(\rho_2\cos\varphi_2-\rho_1\cos\varphi_1)^2+(\rho_2\sin\varphi_2-\rho_1\sin\varphi_1)^2}=$$

$$=(\rho_2^2\cos^2\varphi_2-2\rho_1\rho_2\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2+\rho_1^2\cos^2\varphi_1+$$

$$+\rho_2^2\sin^2\varphi_2-2\rho_1\rho_2\sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2+\rho_1^2\sin^2\varphi_1)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=(\rho_2^2(\cos^2\varphi_2+\sin^2\varphi_2)+\rho_1^2(\cos^2\varphi_1+\sin^2\varphi_1)-$$

$$-2\rho_1\rho_2(\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=(\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_2-\varphi_1))^{\frac{1}{2}}.$$

Задача 24. В полярной системе координат даны две противоположные вершины квадрата $P\left(6,-\dfrac{3}{4}\pi\right)$ и $Q\left(4,\dfrac{1}{6}\pi\right)$. Определить его площадь.

Решение. Так как площадь квадрата равна $\frac{1}{2}d^2$, где d-диагональ квадрата, то определим расстояние между точками P и Q, являющимся диагональю данного квадрата. На полярной системе координат, построим точки P и Q (Рис. 1.20).

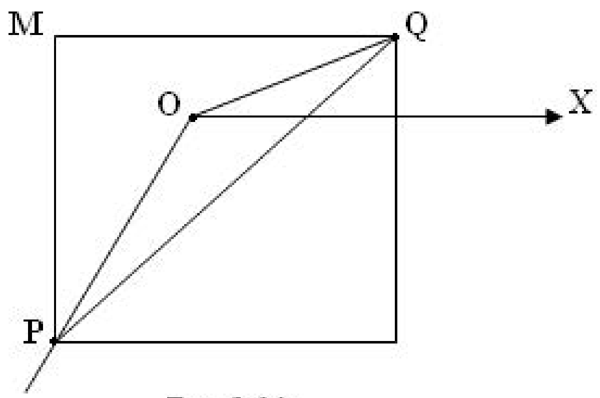


Рис.1.20

Воспользуясь формулами

$$PQ=\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)},\quad S=\frac{1}{2}(PQ)^2,$$

получим:

$$(PQ)^2=\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)=36+16-$$

$$-2\cdot6\cdot4(\cos\varphi_2\cdot\cos\varphi_1-\sin\varphi_2\cdot\sin\varphi_1)=$$

$$=52-48\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\cdot\cos\frac{\pi}{6}-\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\cdot\sin\frac{\pi}{6}\right]=$$

$$=52-48\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)=52-12\cdot(\sqrt{2}-\sqrt{6})=$$

$$= 52 - 12\sqrt{2}(1 - \sqrt{3})$$

Таким образом,

$$S = \frac{1}{2}\left[52 - 12\sqrt{2}(1 - \sqrt{3})\right] \approx 31.9 \quad \text{кв. ед.}$$

§ 1.4. Преобразование координат

1. Формулировка задачи. Чтобы написать уравнение какой-нибудь линии, надо прежде всего выбрать определенную систему координат. При изменении этой системы изменится и уравнение линии. Меняя направления осей, положения начала координат и полюса, изменяя единицы масштаба, можно получить на плоскости различные декартовы и полярные системы координат. Фиксируем произвольную точку M плоскости. В различных системах координат эта точка будет иметь различные координаты. Мы приступаем к решению важной для дальнейшего задачи: каким образом, зная координаты точки в одной системе координат, найти ее координаты в другой системе? Ответ на этот вопрос дают так называемые формулы преобразования координат.

Итак, всякое преобразование координат может быть разбито на два преобразования: перенос начала и поворот осей. При переносе начала меняется начало координат и оси переносятся, сохраняя прежнее направление. При повороте осей начало координат остается на месте.

Отсюда ясно, что для определения положения новой системы относительно старой необходимо указать, в какую точку переносится начало и на какой угол поворачивается вся система, т.е. указать угол между старой осью абсцисс и новой осью абсцисс.

2. Перенос начала координат. Пусть начало перенесено из точки $O(0,0)$ в точку $O'(a,b)$, направления же осей не изменились (Рис. 1.21).

Пусть P есть проекция точки M на ось X, а P_1'-проекция M на ось X'. Обозначим через A проекцию O' на ось X и через B-проекцию на O' на ось Y. Имеем:

$$x = OP, \quad y = MP, \quad x' = O'P', \quad MP' = y', \quad OA = a, \quad OB = b.$$

Разбивая отрезок OP при помощи точки A, имеем:

$$x = OP = OA + AP = OA + O'P' = a + x'.$$

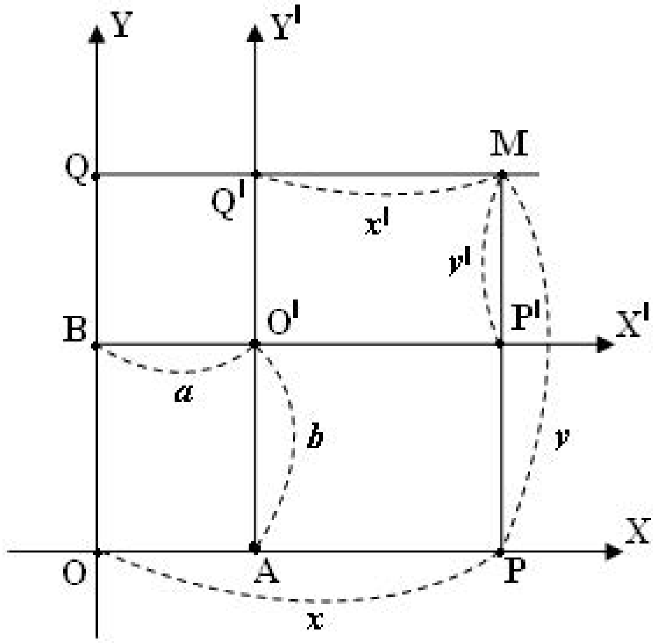


Рис.1.21

Аналогично

$$y = OQ = OB + BQ = OB + O'Q' = b + y'.$$

Последние две формулы, выражают старые координаты через новые. Определяя из этих равенств x' и y', получим:

$$\begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b \end{cases} \tag{1.22}$$

Итак, при переносе начала координат формулы преобразования таковы:

$$\begin{cases} x = x' + a, \\ y = y' + b, \end{cases} \tag{1.23}$$

т.е. старая координата равна новой плюс координата нового начала, а новая координата (формулы 1.22) равна старой минус координата нового начала.

3. Поворот осей координат. Пусть даны две декартовы системы координат с одинаковым началом $O(0,0)$ и различными направлениями осей (Рис. 1.22).

Пусть α есть угол между осями OX и OX'. Обозначим через x, y и x', y' координаты произвольной точки M соответственно в старой и новой системах:

$$x = |OP|, \quad y = |MP|, \quad x' = |OP'|, \quad y' = |MP'|.$$

Тогда из рис. 1.22 имеем:

$$x = OP = OM\cos(\alpha + \varphi) = OM\cos\alpha \cdot \cos\varphi - OM\sin\alpha \cdot \sin\varphi,$$

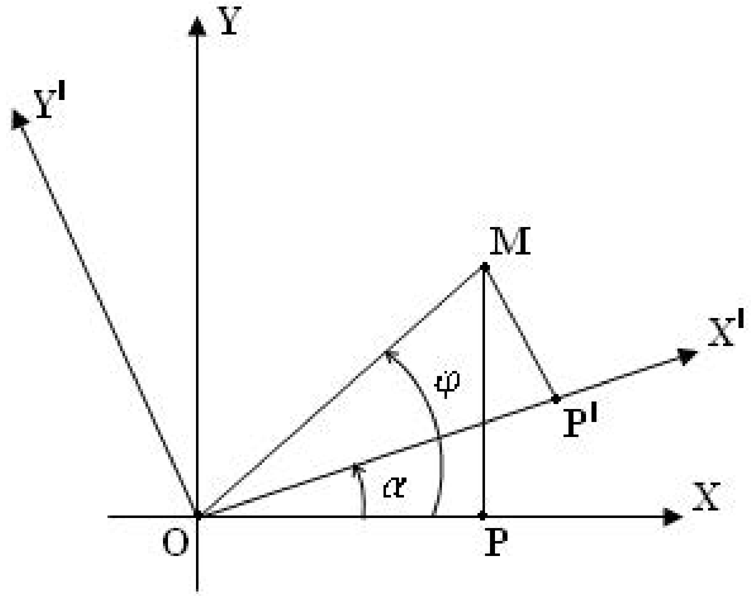


Рис.1.22

$$y = PM = OM\sin(\alpha+\varphi) = OM\sin\alpha\cdot\cos\varphi + OM\cos\alpha\cdot\sin\varphi,$$

Так как (см. гл. I, формулы (1.2) и гл. II, формулы (1.5))

$$OM\cos\varphi = x',\quad OM\sin\varphi = y',$$

то

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y = y'\cos\alpha + y'\cos\alpha. \end{cases} \tag{1.24}$$

Так как система координат XOY, в свою очередь, получается из системы $X'O'Y'$ поворотом осей вокруг начала на угол $-\alpha$, то из формул (1.24), меняя соответственно обозначения координат, получим равенства:

$$x' = x\cdot\cos(-\alpha) - y\cdot\sin(-\alpha) = x\cos\alpha + y\sin\alpha,$$

$$y' = x\cdot\sin(-\alpha) + y\cdot\cos(-\alpha) = -x\cdot\sin\alpha + y\cdot\cos\alpha.$$

Таким образом, получим выражения новых координат точки M через старые, т.е.

$$\begin{cases} x' = x\cdot\cos\alpha + y\cdot\sin\alpha, \\ y' = -x\cdot\sin\alpha + y\cdot\cos\alpha. \end{cases} \tag{1.25}$$

Равенства (1.24) и (1.25) являются формулами преобразования координат произвольной точки M при повороте осей координат.

4. Общие формулы преобразования прямоугольных координат. Пусть новая система координат $O_1X_1Y_1$ отличается от первоначальной OXY как началом координат, так и направлением осей (Рис. 1.23). Обозначим координаты нового начала O' (в старой системе) через (a, b), угол поворота осей координат через α, координаты точки M в старой системе через (x, y), а в новой системе через (x', y').

Введем в рассмотрение еще одну систему координат с началом в точке $O'(a, b)$ и осями $O'X'$ и $O'Y'$ того же направления, как и оси OX и OY. Обозначим координаты точки M в этой системе через (x', y'). Тогда по формуле (1.23), (1.22) имеем:

$$\left.\begin{aligned} x &= x' + a, \\ y &= y' + b \end{aligned}\right\} \tag{1.26}$$

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - a \\ y' &= y - b. \end{aligned}\right\} \tag{1.27}$$

По формулам (1.24) и (1.25)

$$\left.\begin{aligned} x' &= x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha, \\ y' &= x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha \end{aligned}\right\} \tag{1.28}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x' \cos\alpha + y' \sin\alpha, \\ y_1 &= -x' \sin\alpha + y' \cos\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{1.29}$$

Внеся x' и y' из (1.28) в (1.26) и из (1.27) в (1.29), получим:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha + a, \\ y &= x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha + b \end{aligned}\right\} \tag{1.30}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= (x - a) \cos\alpha + (y - b) \sin\alpha, \\ y_1 &= -(x - a) \sin\alpha + (y - b) \cos\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{1.31}$$

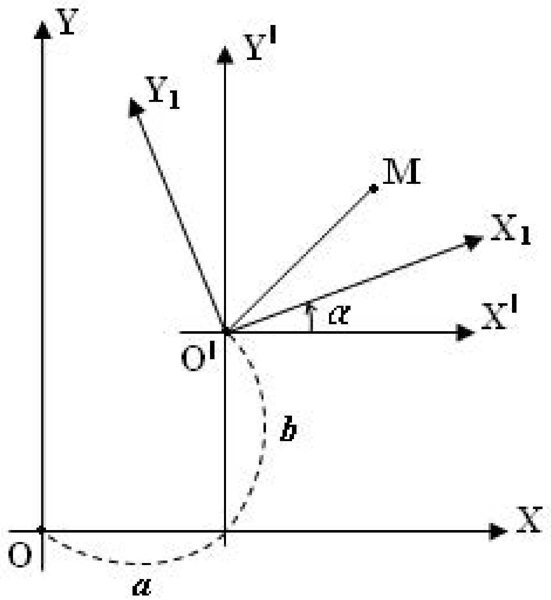


Рис.1.23

5. Поворот полярной оси. Рассмотрим две полярные системы координат с общим полюсам O, одинаковыми масштабными отрезками, но разными направлениями полярных осей OP и OP'. Обозначим через α угол, составляемый осью OP с осью OP' (Рис. 1.24). Таким образом, полярная система координат с осью OP' (новая система) будет получена из полярной системы координат с осью OP (старой системы) поворотом полярной оси вокруг полюса на угол α. Пусть M-произвольная точка плоскости, ρ, y и ρ', y'-ее старые и новые полярные координаты соответственно.

Очевидно, что

$$\rho' = \rho, \quad y' = y - \alpha. \tag{1.32}$$

Формулы (1.32) устанавливают связь между старыми и новыми полярными координатами точки M.

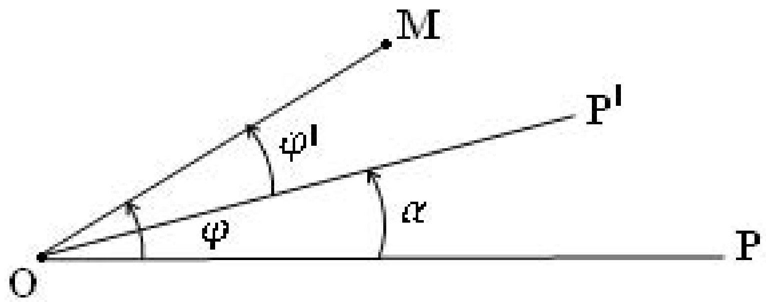


Рис.1.24

Задача 25. Написать формулы преобразования координат, если a) начало перенесено в точку (3, 2); b) оси повернуты на 45^0.

Решение. a) По формуле (1.22) и (1.23) имеем:

$$\left.\begin{array}{l} x = x' + 3 \\ y = y' + 2, \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x' = x - 3 \\ y' = y - 2 \end{array}\right\}.$$

b). Согласно формулам (1.24) и (1.25), получим:

$$x = x' \cos\frac{\pi}{4} - y' \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y').$$

Аналогично, имеем:

$$x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y), \quad y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x + y).$$

Задача 26. Какие координаты будет иметь точка $M(7, 1)$ после переноса начала в точку $O_1(2, 3)$ и поворота осей на 45^0.

Решение. Полагая в формулах (1.31) $a = 2, b = 3, \alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$, получим:

$$x' = (x-2)\frac{\sqrt{2}}{2} + (y-3)\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$y' = -(x-2)\frac{\sqrt{2}}{2} + (y-3)\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Подставляя в них $x = 7, y = 1$, найдем новые координаты точки M:

$$x' = (7-2)\frac{\sqrt{2}}{2} + (1-3)\frac{\sqrt{2}}{2} = 5\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2},$$

$$y' = -(7-2)\frac{\sqrt{2}}{2} + (1-3)\frac{\sqrt{2}}{2} = -5\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{7\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $M\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)$.

Задача 27. В какую точку следует перенести начало (не поворачивая осей), чтобы точка $A(3,8)$ имела координаты (10, -2)?

Решение. Используя формулы (1.23) имеем:

$$x = x' + a, \quad y = y' + b, \quad 3 = 10 + a, \quad a = -7; \quad 8 = -2 + b, \quad b = 10.$$

Ответ: $O_1(-7, 10)$.

Задача 28. На какой угол следует повернуть оси (не перенося начала), чтобы точки $A(-2,3)$ оказались на оси ординат?

Решение. Согласно условию задач координаты точки $M(0,y)$. Тогда по формулам (1.25), получим:

$$\left.\begin{array}{r} 0 = -2\cos\alpha + 3\sin\alpha, \\ y = 2\sin\alpha + 3\cos\alpha. \end{array}\right\}$$

Откуда из первого равенства, имеем:

$$2\cos\alpha = 3\sin\alpha, \quad \text{или} \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}.$$

Окончательно получим; $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{2}{3} \approx 38^0 41' + \pi n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Задача 29. Уравнения кривой в старой системе координат имеем вид $xy = 1$. Найти уравнения этой же кривой в новой системе координат, если старая система повернута на угол 45^0.

Решение. Система уравнений (1.24) при этом имеет вид:

$$x = x'\frac{1}{2} - y'\frac{1}{2}, \quad y = x'\frac{1}{\sqrt{2}} + y'\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Подставляя значения x и y в уравнении $xy = 1$, получим:

$$\frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = 1.$$

Данная кривая называется гиперболой.

§ 1.5. Уравнение линии как геометрическое место точек

Мы уже знаем, что в декартовой системе координат каждой точке плоскости соответствует пара действительных чисел и, наоборот, каждой такой паре чисел соответствует определенная точка плоскости.

Теперь установим, что существует соответствие между уравнениями с двумя переменными, с одной стороны и линиями с другой. Это дает возможность заменять изучение линий изучением их уравнений, и наоборот.

Уравнение

$$F(x, y) = 0,$$

связывающее две переменные величины x и y, называются уравнением линии L (с выбранной на плоскости системе координат), если координаты точки линии L удовлетворяют этому уравнению, а координаты точек, не принадлежащих линии L этому уравнению, не удовлетворяют.

Таким образом, уравнение линии L есть соотношение, связывающее координаты точек данной линии (и только этих точек). Это соотношение представляет собой аналитическую запись, того свойства, которое выделяет среди всех точек плоскости точки данной линии. Так как линия рассматривается как геометрическое место точек, то можно сказать, что уравнение линии представляет собой запись свойства, определяющего данное геометрическое место точек.

Так, например, окружность радиуса R с центром в точке $O'(a, b)$ определяется как геометрическое место точек плоскости, находящихся от точки O' на постоянном расстоянии R. Уравнение этой окружности имеет вид:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

В этом уравнении постоянные a, b, R суть соответственно координаты центра и радиус окружности переменные x и y являются координатами произвольной точки $M(x, y)$ окружности и называются текущими координатами. В частности, если начало координат выбрано в центре окружности, т.е.

$a = b = 0$, то уравнение окружности принимает более простой вид:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Таким образом, чтобы составить уравнение линии как геометрического места точек, обладающих одинаковым свойством, нужно:

1) взять произвольную (текущую) точку $M(x, y)$ линии,

2) записать равенством общее свойство всех точек M линии,

3) входящие в это равенство отрезки (и углы) выразить через текущие координаты точки $M(x, y)$ и через данные в задаче.

В некоторых случаях при составлении уравнения линии текущие координаты не связывают одним уравнением, а каждую координату в отдельности выражают в виде функции нового переменного, например t. Получают уравнения вида:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t). \end{aligned}\right\} \tag{1.33}$$

Такое представление искомой линии называется параметрическим, а уравнения (1.33) называют параметрическими уравнениями данной линии.

Исключение параметра t из системы (1.33) (если возможно) приводит к уравнению, связывающему x и y, т.е. к обычному уравнению линии вида $F(x, y) = 0$.

Например, параметрические уравнения окружности радиуса R с центром в начале координат, имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} x &= R\cos t, \\ y &= R\sin t. \end{aligned}\right\}$$

Задача о нахождении точек пересечения двух линий, имеющих в выбранной системе координат уравнения $F(x, y) = 0$ и $\phi(x, y) = 0$, сводится к отысканию точек, координаты которых удовлетворяют уравнениям обеих кривых, т.е. сводится к решению системы двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} F(x, y) = 0, \\ \phi(x, y) = 0. \end{cases} \tag{1/34}$$

Система (1.34) может иметь одно решение $x = x_0,\ y = y_0$ (данные кривые пересекаются в одной точке $M_0(x_0, y_0)$), может иметь несколько и даже бесчисленное множество решений (кривые будут пересекаться соответственно в нескольких точках или в бесчисленном множестве точек). Может также случиться, что система (1.34) не имеет решения. В этом случае данные кривые не имеют общих точек, т.е. не пересекаются.

Примеры решения задач

Задача 30. Составить уравнение геометрического места точек, одинаково удаленных от начала координат и от точки $A(-5;3)$.

Решение. Пусть точка $M(x,y)$ лежит на искомом геометрическом месте (Рис. 1.25). Тогда, согласно условию задачи $MA = MO$, т.е. расстояния точки $M(x,y)$ до точки $A(-5;3)$ и начала координат O равны между собой:

$$MA = \sqrt{(x+5)^2 + (y-3)^2}, \quad MO = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Тогда в силу равенства $MA = MO$, имеем

$$\sqrt{(x+5)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Упростим полученное уравнение. Возводя в квадрат обе части уравнения и раскрывая скобки в подкоренных выражениях, находим

$$x^2 + 10x + 25 + y^2 - 6y + 9 = x^2 + y^2.$$

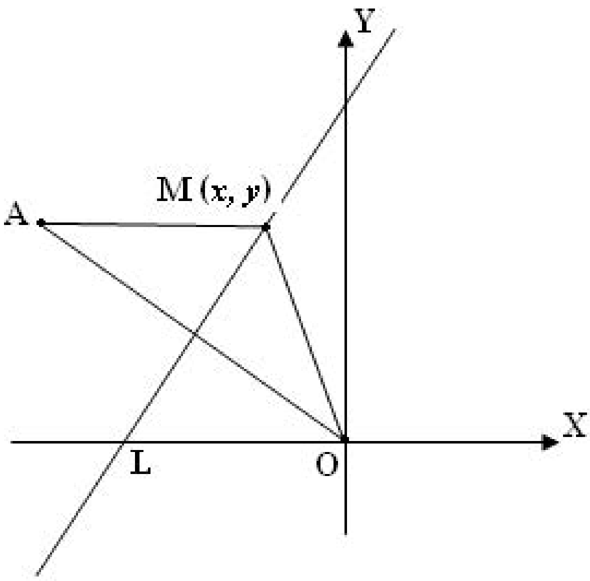


Рис.1.25

Перенеся все члены в левую часть, приводя подобные и сокращая на 2, получим уравнение $5x - 3y + 17 = 0$. В самом деле, пусть $N(x,y)$-такая точка. Тогда выполняется одно из двух неравенств:

$$NA > NO; \quad NA < NO$$

или в координатах

$$\sqrt{(x+5)^2+(y-3)^2} > \sqrt{x^2+y^2},$$

$$\sqrt{(x+5)^2+(y-3)^2} < \sqrt{x^2+y^2}.$$

Первое из этих неравенств приводится к виду $5x-3y+17>0$, а второе к виду $5x-3y+17<0$. Следовательно, координаты точки $N(x,y)$ не удовлетворяют уравнению геометрического места $5x-3y+17=0$.

Задача 31. Составить уравнение геометрического места точек, удаленных от начала координат на 6 единиц. Лежат ли на данной линии точки $A(6;0)$, $B(3;4)$, $C(7;2)$, $D(5;\sqrt{11})$?

Пусть $M(x,y)$-произвольная точка данного геометрического места. По условию $OM=6$. По формуле расстояния точки от начала координат

$$OM=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Следовательно, $\sqrt{x^2+y^2}=6$. Возводя в квадрат обе части этого уравнения, получим $x^2+y^2=36$. Следовательно, это есть уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом $R=6$.

Выясним, лежат ли на данной окружности указанные точки. Подставляя координаты точки A в уравнение окружности, получаем тождество

$$6^2+0=36.$$

Таким образом, точка A лежит на окружности.

Для точки B получается неравенство

$$3^2+4^2=25<16,$$

поэтому точка B окружности не принадлежит и лежит внутри круга радиуса $R=6$, ибо ее расстояние до начала координат $OB=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5<6$.

Подстановка в уравнение полученной окружности точки $C(7;2)$ приводит к неравенству

$$7^2+2^2=53>36,$$

следовательно, точка C также не лежит на окружности и лежит вне круга радиуса $R=6$.

Аналогичным образом убеждаемся, что точка D лежит на окружности.

Задача 32. Определить траекторию точки M, которая движется так, что в любой момент времени ее расстояние от точки $A(8;0)$ в четыре раза больше расстояния от точки $B(\frac{1}{2};0)$.

Решение. Пусть точка $M(x;y)$ лежит на искомой траектории. Тогда согласно условию $MA = 4MB$. Выразим расстояние MA и MB через координаты точек:

$$MA = \sqrt{(x-8)^2 + (y-0)^2}, \quad MB = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-0)^2}.$$

В силу равенства $MA = 4MB$, имеем:

$$\sqrt{(x-8)^2 + y^2} = 4\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2}.$$

Упрощая это уравнение, находим:

$$(x+2)^2 + y^2 = 25.$$

Получено уравнение окружности радиуса $R = 5$ с центром в точке $C(-2;0)$ (Рис.1.26).

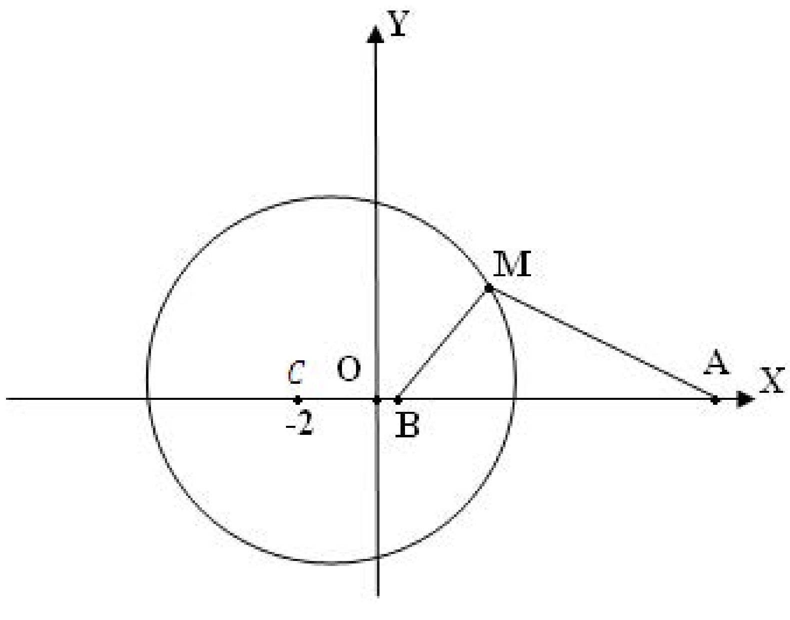


Рис.1.26

Задача 33. Написать уравнения биссектрис координатных углов.

Решение. Пусть точка $M(x,y)$ лежит на биссектрисе $1^{-\text{ой}}$ четверти координатного угла. Тогда ее расстояния до точки $A(x;0)$ и $B(0;y)$ равны, т.е. $MA = MB$. Согласно формуле расстояния между двумя точками, имеем:

$$MA = \sqrt{(x-x)^2 + (y-0)^2}, \quad MB = \sqrt{(x-0)^2 + (y-y)^2}$$

В силу равенства $MA = MB$, имеем.

$$\sqrt{y^2} = \sqrt{x^2},$$

или $y = x$. Аналогично, находятся уравнения биссектрис остальных координатных углов. Окончательно имеем: $y = \pm x$ (Рис.1.27).

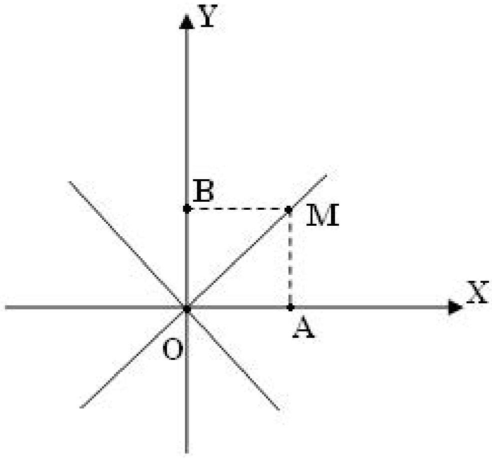


Рис.1.27

Задача 34. Написать уравнение геометрического места точек, равноудаленных от точки $F(2;2)$ и от оси OX. Построить линию по ее уравнению.

Решение. Пусть точка $M(x;y)$ лежит на искомом геометрическом месте точек (Рис.1.28).

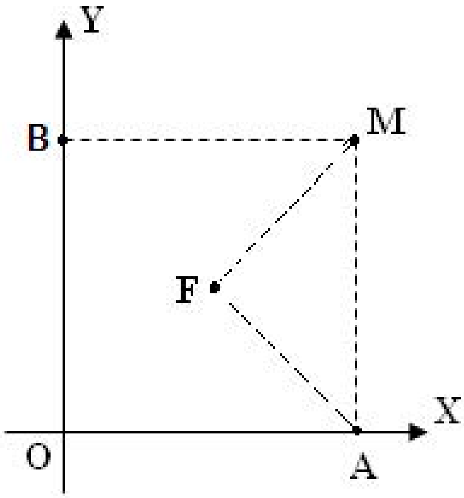


Рис.1.28

Тогда согласно условию задачи $MF = MA$,

$$MF = \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2}, \quad MA = y.$$

В силу равенства $MF = MA$, получим:

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2} = y,$$

или

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 = y^2,$$

и откуда

$$y = \frac{1}{4}x^2 - x + 2 = \frac{1}{4}(x-1)^2 + 1.$$

Окончательно имеем:

$$y - 1 = \frac{1}{4}(x-2)^2.$$

Искомое геометрическое место точек есть парабола, имеющая вершину в точке $O_1(2;1)$, симметричная прямой $x = 2$ и с фокусом в точке $F(2;2)$, (Рис.1.29).

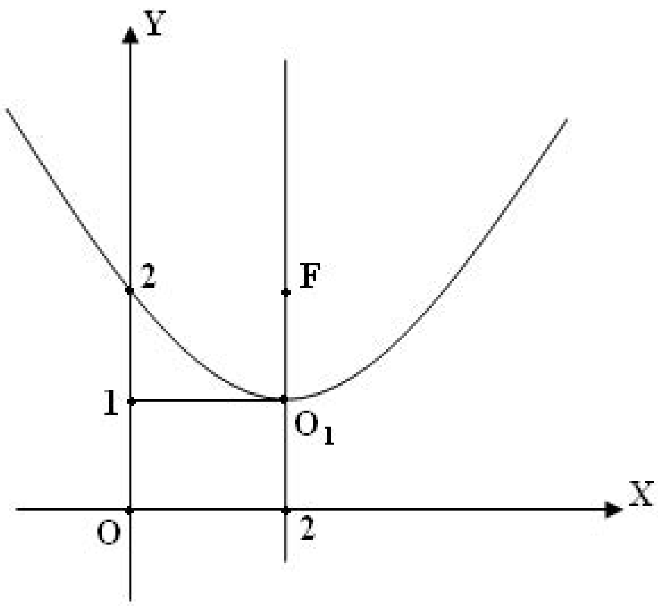


Рис.1.29

Задача 35. Найти уравнение геометрического места точек, сумма расстояний которых от точек $F_1(2;3)$ и $F_2(4;5)$ есть величина постоянная, равная 10 (Рис.1.30). Установить вид линии.

Решение. Пусть точка $M(x;y)$ лежит на искомом геометрическом месте точек. Тогда по условию задачи,

$$MF_1 + MF_2 = 10,$$

но

$$MF_1 = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2}, \quad MF_2 = \sqrt{(x-4)^2 + (y-5)^2}.$$

В силу последнего равенства, имеем

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} + \sqrt{(x-4)^2 + (y-5)^2} = 10.$$

Это и есть уравнение искомого геометрического места. Данное уравнение является иррациональным. Перенеся один из радикалов в правую часть, возводим обе его части в квадрат. Заранее полагаем, что эквивалентность исходного и окончательного уравнений в данном случае имеет место.

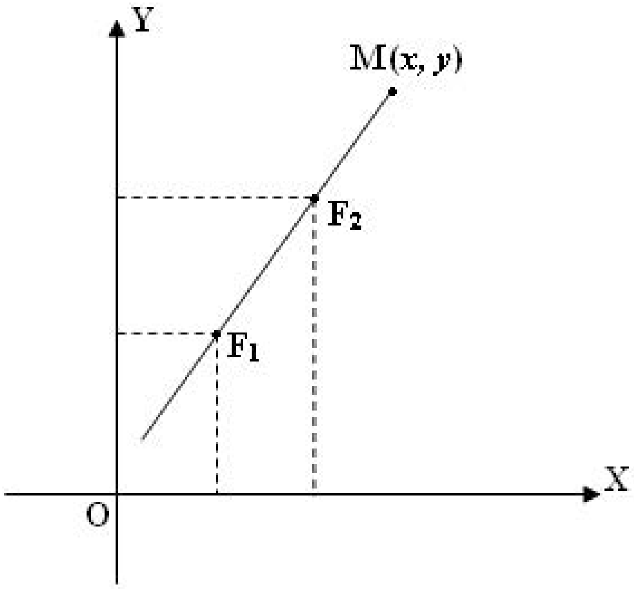


Рис.1.30

После преобразования получим:

$$24x^2 - 2xy + 24y^2 - 136x - 186y + 1 = 0.$$

Искомое геометрическое место точек есть эллипс. Чтобы убедится в этом, преобразуем полученное уравнение к каноническому виду.

Используем формулы преобразования общего уравнения второй степени (см. [24]). Повернем оси координат на угол α, найдя $\operatorname{ctg} 2\alpha$ по формуле

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{A - C}{B},$$

где $A = 24,\ B = -2,\ C = 24$. Следовательно, $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{24-24}{-2} = \frac{0}{-2} = 0$ и $2\alpha = 90^0$. Отсюда $\alpha = 45^0$. Так как $\sin 45^0 = \cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то формулы преобразования координат (см.[ ] гл.v.§7) примут вид:

$$x = \frac{x - y}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{x + y}{\sqrt{2}}.$$

Подставляем эти значения x и y в данное уравнение:

$$24\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2\frac{x-y}{\sqrt{2}} \cdot \frac{x+y}{\sqrt{2}} + 24\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2 - 136\frac{x-y}{\sqrt{2}} - 186\frac{x+y}{\sqrt{2}} + 1 = 0.$$

или

$$12(x-y)^2-(x^2-y^2)+12(x+y)^2-161\sqrt{2}X-25\sqrt{2}Y+1=0.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные, получим:

$$23X^2+25Y^2-161\sqrt{2}X-25\sqrt{2}Y+1=0.$$

Полученное уравнение не содержит члена с произведением переменных. Произведя дальнейшее упрощение, придем к уравнению

$$23\left(x-\frac{7}{\sqrt{2}}\right)^2+25\left(y-\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2=1150,$$

или

$$\frac{\left(x-\frac{7}{\sqrt{2}}\right)^2}{50}+\frac{\left(y-\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2}{46}=1.$$

Данное уравнение является уравнением эллипса с полуосями $a=5\sqrt{2},\ b\approx$ ≈ 6.8. (Рис.1.31). Находим координаты центра этого эллипса в системе координат $x'o'y'$. Для этого подставим координаты $X=\frac{7}{\sqrt{2}}$ и $Y=\frac{2}{\sqrt{2}}$ точки O' из новой системе координат $X'O'Y'$ в формулы преобразования и получим:

$$x'=\frac{\frac{7}{\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}=\frac{5}{2}=2.5;$$

$$y'=\frac{\frac{7}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}=\frac{9}{2}=2.5$$

Таким образом, центр эллипса имеет координаты $O'(2.5;\ 4.5)$.

Эллипс пересекает старые координаты системы XOY в точках, которые находятся из полученной квадратной уравнении эллипса, если в нем положить $y=0$ или $x=0$, т.е.

$$24x^2-136x+1=0 \quad \text{и} \quad 24y^2-186y+1=0.$$

$$x_1\approx 0,008;\quad x_2\approx 5,7;\quad y_1\approx 0,006;\quad y_2\approx 7,7.$$

Задача 36. Составить уравнение геометрического места точек, произведение расстояний которых до двух данных точек F_1 и F_2 есть величина постоянная, равная a^2. Длину $F_1\ F_2$ считать равной $2a$.

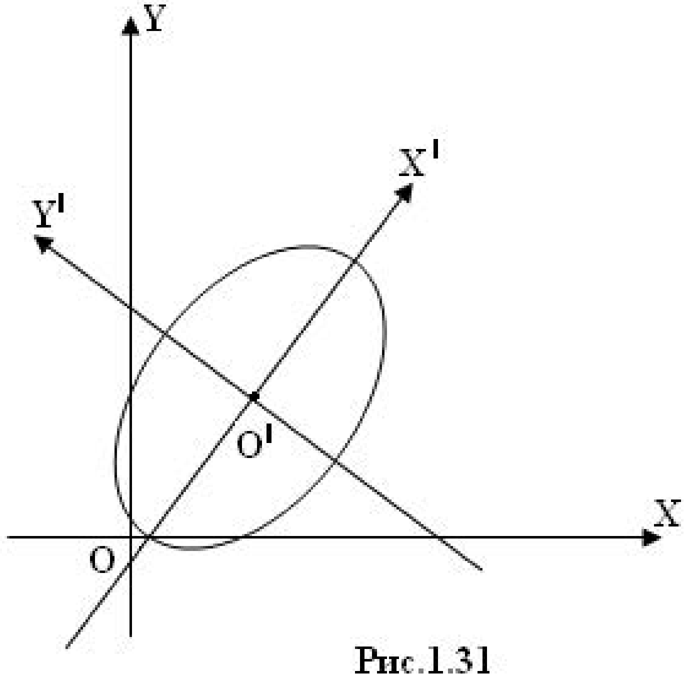


Рис.1.31

Решение. Начало координат выбираем в середине отрезка F_1 F_2. Ось OX направим вдоль F_1 F_2. Точки F_1 и F_2 при указанном выборе координатной системы будут иметь координаты $F_2(-a;0)$, $F_2(a;0)$. Если $M(x,y)$-произвольная точка геометрического места, то по условию

$$F_1M \cdot F_2M = a^2.$$

По формуле расстояния между двумя точками с учетом последнего равенства, получим искомое уравнение геометрического места

$$\sqrt{(x+a)^2+y^2} \cdot \sqrt{(x-a)^2+y^2} = a^2.$$

С целью получить в более простом виде данное уравнение, возведем обе части этого уравнения в квадрат и группируя члены, находим:

$$[(x+a)^2+y^2][(x-a)^2+y^2] = a^4,$$

или

$$[(x^2+y^2+a^2)+2ax][(x^2+y^2+a^2)-2ax] = a^4,$$

отсюда

$$[(x^2+y^2)+a^2]^2 - 4a^2x^2 = a^4.$$

Преобразуя последнее уравнение, получаем:

$$(x^2+y^2)+2a^2(x^2+y^2)+a^4-4a^2x^2 = a^4,$$

$$(x^2+y^2)^2+2a^2(y^2-x^2) = 0$$

или в окончательном виде:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2).$$

Это и есть искомая кривая, которой называется *лемнискатой Бернулли.*

Преобразуем теперь это уравнение к полярным координатам, используя формулы $x = r \cdot \cos\varphi,\ y = r \cdot \sin\varphi$. Подставляя данные формулы в последнее уравнение, будем иметь:

$$r^4 = 2a^2 r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi),$$

откуда получим окончательно

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi.$$

Построим теперь эту кривую. С этой целью составим таблицу значений r по известным значениям φ, имея в виду что так как полярный радиус может принимать только действительные значения, то кривая не может быть расположена в тех секторах, где полярный радиус имеет мнимые значения. Это будет иметь место для значений φ от $\varphi = \frac{\pi}{4}$ до $\varphi = \frac{3}{4}\pi$ и от $\varphi = \frac{5}{4}\pi$ до $\frac{7}{4}$, а поэтому в этих секторах точек кривой нет (Рис.1.32). Данная кривая является симметричной относительно оси OX и OY в прямоугольных координатах.

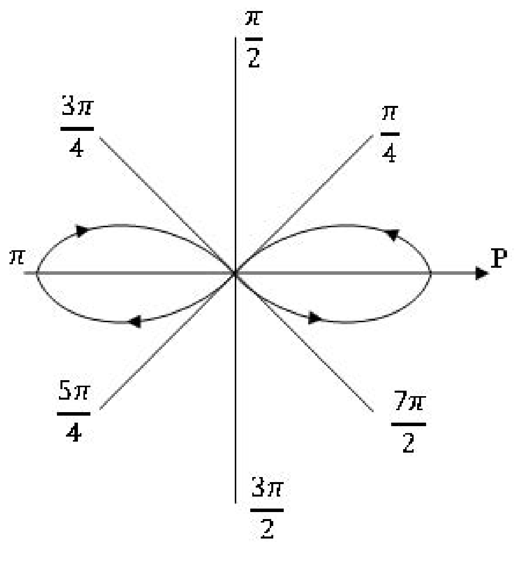


Рис.1.32

Задача 37. Составить уравнение геометрического места оснований перпендикуляров, опущенных из начала координат на прямые, отсекающие от координатного угла треугольники постоянной площади S.

Решение. Составим уравнение геометрического места сначала в полярных координатах, совмещая полюс с началом прямоугольных координат и полярную ось с положительной полуосью OX. Согласно условию задачи

$$\frac{OA \cdot OB}{2} = S,$$

где из треугольника OAM (Рис.1.33)

$$OA = \frac{OM}{\cos\varphi} = \frac{r}{\cos\varphi},$$

из треугольника OBM

$$OB = \frac{OM}{\sin\varphi} = \frac{r}{\sin\varphi},$$

откуда

$$r^2 = S\sin 2\varphi.$$

Составим уравнение геометрического места в прямоугольных координатах

$$r^2 = 2S\sin\varphi \cdot \cos\varphi,$$

где

$$\cos\varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Подставляя данные выражения в последнем равенстве, окончательно получим

$$(x^2 + y^2)^2 = 2Sxy.$$

Эта кривая есть *лемнискатой* (Рис.1.33).

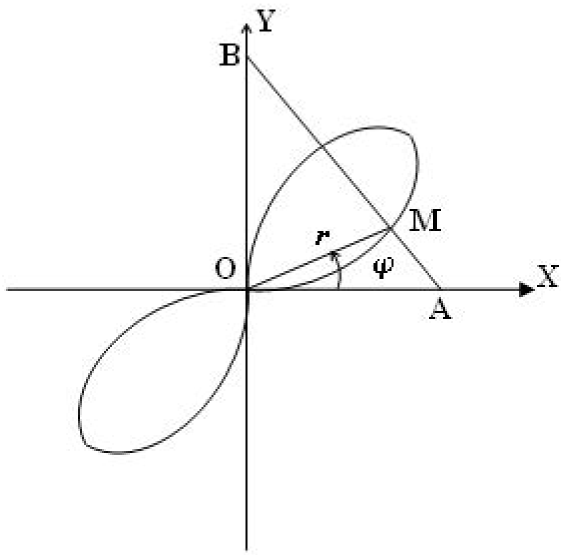


Рис.1.33

Задача 38. Найти точки пересечения окружности $x^2+y^2=25$ и прямой $2x-y+5=0$.

Решение. Координаты точек пересечения должны удовлетворять обоим указанным уравнениям, так как эти точки находятся как на одной так и на другой линии. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ 2x-y+5=0. \end{cases}$$

Значение $y=2x+5$ из второго уравнения подставляем в первое:

$$x^2+(2x+5)^2=25, \quad \text{т.е.} \quad x^2+4x=0,$$

или $x(x+4)=0$, откуда $x_1=0$, и $x_2=-4$, откуда $y_1=5$, и $y_2=-3$. Следовательно, данные линии имеют две точки пересечения $A(0;5)$ и $B(-4;-3)$ (Рис1.34).

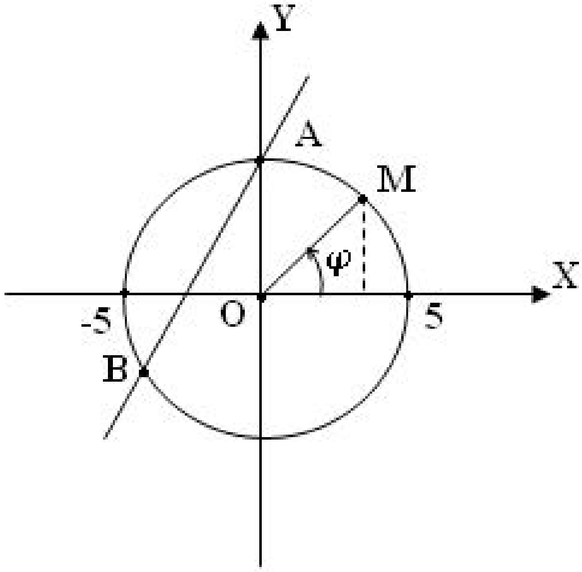


Рис.1.34

Задача 39. Написать параметрические уравнения окружности радиуса R с центром в начале координат.

Решение. Воспользуемся Рис.1.34. Пусть $M(x,y)$-произвольная точка окружности.

Из рис.1.34 видно, что текущие координаты точки на окружности являются функциями угла φ. Поэтому примем угол φ за переменный параметр. При этом любом положении точки $M(x,y)$ на окружности будут иметь место равенства:

$$\left.\begin{aligned} x&=R\cos\varphi, \\ y&=R\sin\varphi. \end{aligned}\right\}$$

Полученные равенства и будут параметрическими уравнениями окружности. Исключая параметр φ из этих уравнений, можно получить уравнение окружности в прямоугольных координатах. Для этого, возводя обе части каждого из уравнений в квадрат и складывая, получим:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Задача 40. Какая линия определяется параметрическими уравнениями $x = t^2,\ y = t^2$?

Решение. Исключая параметр t, приходим к уравнению $y = x$, но поскольку $x \geq 0$ и $y \geq 0$, то данные параметрические уравнения определяют луч, направленный, по биссектрисе $1^{-\text{го}}$ координатного угла.

Задача 41. Кривая задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$$

Найти уравнение этой линии в прямоугольной системе координат.

Решение. Разделим первое уравнение на a $\frac{x}{a} = \cos t$, второе на b $\frac{y}{b} = \sin t$, где t-параметр. Возводя в квадрат эти уравнения и сложив их, получим:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Данная кривая называется эллипсом (Рис.1.35).

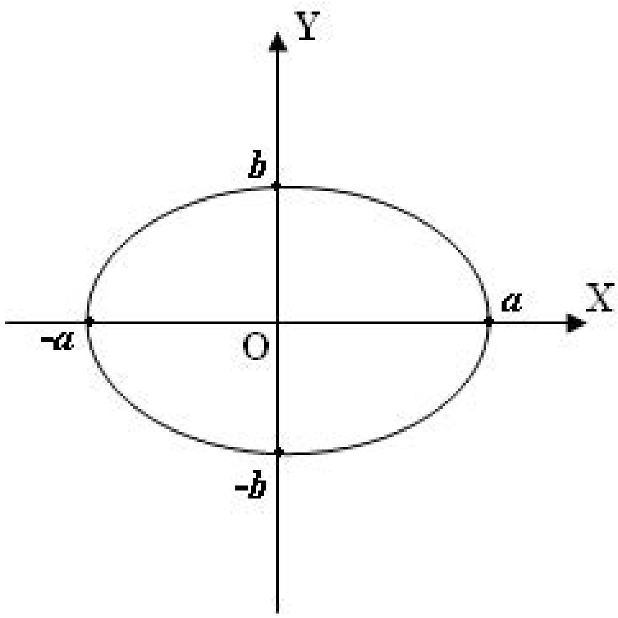


Рис.1.35

§1.6. Задачи для самостоятельного решения

1. Доказать, что треугольник с вершинами $A(-3;-2)$, $B(0;-1)$ и $C(-2;5)$ прямоугольный.

2. Даны две точки $A(5)$ и $B(-3)$. Определить:

1) координату точки M, симметричной точке A относительно точки B;

2) координату точки N, симметричной точке B относительно точки A.

3. Отрезок, ограниченный точками $A(-2)$ и $B(19)$, разделен на три равные части. Определить координаты точек деления.

4. Найти координаты проекций на ось абсцисс точек $A(2;-3)$, $B(3;-1)$, $C(-5;1)$, $D(-3;-2)$, $E(-5;-1)$.

5. Найти координаты точек, симметричных относительно оси OX точкам $A(2;3)$, $B(-3;2)$ и относительно оси OY точками $C(-1;2)$, $D(3;-1)$.

6. Дана точка $A(-3;4)$. Построить точку $A_1(x,y)$ симметричную ей относительно начала координат.

7. Найти координаты точек $A(2;3)$ и $B(5;-2)$, симметричных; 1)относительно биссектрисы первого координатного угла; 2)относительно биссектрисы второго координатного угла.

8. Построить точки $A(-4;0)$, $B(-1;4)$ и точки A_1 и B_1, симметричные с данными относительно оси OY. Вычислить периметр трапеции ABB_1A_1.

9. Под каким углом к положительному направлению оси OX наклонен отрезок, соединяющий точки $A(-1;3)$ и $B(7;-3)$?

10. Построить треугольник с вершинами $A(-4;2)$, $B(0;-1)$ и $C(3;3)$ и определить его периметр и углы.

11. Отрезок AB соединяет точки $A(-6;7)$ и $B(1;-2)$. Определить длину этого отрезка и угол между ним и положительным направлением оси OX.

12. Вершины треугольника суть точки $A(-\sqrt{3};1)$, $B(0;2)$ и $C(-2\sqrt{3};2)$. Вычислить его внешний угол при вершине A.

13. В треугольнике с вершинами $A(5;4)$, $B(-1;2)$, $C(5;1)$ проведена медиана AM. Найти ее длину.

14. На оси ординат найти такую точку M, расстояние которой до точки $N(-8;13)$ равнялось бы 17.

15. Найти центр M и радиус r круга, вписанного в треугольник с вершинами $A(9;2)$, $B(0;20)$ и $C(-15;-10)$.

16. Даны вершины треугольника $A(-3;6)$, $B(9;-10)$ и $C(-5;4)$. Определить центр M и радиус R описанного около этого треугольника круга.

17. В треугольнике с вершинами $A(-2;0)$, $B(6;6)$ и $C(1;-4)$ определить длину биссектрисы AE.

18. Даны вершины треугольника $A(1;-3)$, $B(3;-5)$ и $C(-5;7)$. Определить середины его сторон.

19. Даны три точки $A(1;-1)$, $B(3;3)$ и $C(4;5)$, лежащие на одной прямой. Определить отношение λ, в котором каждая из них делит отрезок, ограниченный двумя другими.

20. Определить координаты концов A и B отрезка, который точками $P(2;2)$ и $Q(1;5)$ разделен на три равные части.

21. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(2;0)$, $B(5;3)$ и $C(2;6)$.

22. Площадь треугольника $S=4$, две его вершины суть точки $A(2;1)$ и $B(3;-2)$, а третья вершина C лежит на оси OX. Определить координаты вершины C.

23. Вершины треугольника суть точки $A(3;6)$, $B(-1;3)$ и $C(2;-1)$. Вычислить длину его высоты, проведенной из вершины C.

24. Три вершины параллелограмма суть точки $A(3;7)$, $B(2;-3)$ $C(-1;4)$. Вычислить длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.

25. Показать, что точки $A(1;1)$, $B(-1;7)$ и $C(0;4)$ лежат на прямой.

26. Вычислить площадь четырехугольника с вершинами $A(3;1)$, $B(4;6)$, $C(6;3)$ и $D(5;-2)$.

27. Определить площадь параллелограмма, три вершины которого суть точки $A(-2;3), B(4;-5)$ и $C(-3;1)$.

28. Даны последовательные вершины однородной четырехугольной пластинки $A(2;1)$, $B(5;3), C(-1;7)$ и $D(-7;5)$. Определить координаты ее центра тяжести.

29. Площадь параллелограмма $S=12$кв. ед.; две его вершины суть точки $A(-1;3)$ и $B(-2;4)$. Найти две другие вершины этого параллелограмма при условии, что точка пересечения диагоналей лежит на оси абсцисс.

30. В полярной системе координат $(\varphi;r)$ построить точки $A(0;3)$, $B\left(\dfrac{\pi}{4};\ 2\right)$, $C\left(\dfrac{\pi}{2};\ -2\right)$, $D\left(\dfrac{3\pi}{2};\ 3\right)$, $E\left(-\dfrac{\pi}{4};\ 4\right)$.

31. Определить полярные координаты точек симметричных относительно полярной оси точкам $A\left(3;\ \frac{\pi}{4}\right)$, $B\left(2;\ -\frac{\pi}{2}\right)$, $C\left(3;\ -\frac{\pi}{3}\right)$, $D(1;2)$, $E(5;-1)$, заданным в полярной системе координат.

32. Вычислить расстояния между двумя данными точками:

1)$A\left(2;\ \frac{\pi}{12}\right)$ и $B\left(1;\ \frac{5\pi}{12}\right)$.

2)$C\left(4;\ \frac{\pi}{5}\right)$ и $D\left(6;\ \frac{6\pi}{5}\right)$.

33. В полярной системе координат даны точки $A\left(4;\ \frac{\pi}{4}\right)$, $B\left(3;\ \frac{\pi}{2}\right)$, $C\left(6;\ -\frac{\pi}{6}\right)$. Найти их декартовы координаты.

34. Дана в прямоугольной системе координат точка $M(3;-3)$. Найти ее полярные координаты, если начало прямоугольной системы координат совпадает с полюсом, а полярная ось совмещена с осью OX.

35. Вычислить площадь треугольника, одна из вершин которого помещается в полюсе, а две другие имеют полярные координаты $M_1\left(4;\ \frac{\pi}{9}\right)$, $M_2\left(1;\ \frac{5\pi}{18}\right)$.

36. В полярной системе координат даны две вершины $A\left(3;\ \frac{4}{9}\pi\right)$ и $B\left(5;\ \frac{3}{14}\pi\right)$ параллелограмма $ABCD$, точка пересечения диагоналей которого совпадает с полюсом. Определить две другие вершины этого параллелограмма.

37. В полярной системе координат даны точки $M_1\left(3;\frac{\pi}{2}\right)$, $M_2\left(1;\ \frac{2}{3}\pi\right)$, $M_3(2;0)$, $M_4\left(5;\ \frac{\pi}{4}\right)$, $M_5\left(3;\ -\frac{2}{3}\pi\right)$, и $M_6\left(1;\ \frac{11}{12}\pi\right)$. Полярная ось повернута так, что в новом положении она проходит через точку M_1. Определить координаты заданных точек в новой полярной системе.

38. Координаты точки относительно некоторой системы координат $x = 2$, $y = -1$. Чему будут равны координаты этой точки, если сохраняя направления осей, перенести начало координат в точку:

$$a)(4;-2),\quad б)(2;-1),\quad в)(-1;-4).$$

39. Относительно двух систем координат XOY и $O'X'Y$ имеющих одно и то же направление осей, координаты некоторой точки (12; -7) и (0; 15). Чему равны координаты начала каждой их этих систем относительно другой?

40. Две системы координат имеют одинаковые направления осей. Координаты начала первой системы относительно второй суть (7; -5). Чему равны координаты начала второй системы относительно первой?

41. Начало координат перенесено (без изменения направления осей) в точку $O'(3;-4)$. Координаты точек $A(1;3)$, $B(-3;0)$ и $C(-1;4)$ определены в новой системе. Вычислить координаты этих же точек в старой системе координат.

42. Как изменятся координаты любой точки $M(x;y)$, если за ось абсцисс принять ось ординат и за ось ординат ось абсцисс?

43. Чему будут равны координаты точки $M(1;\sqrt{3})$, если повернуть оси координат на угол в 60^0?

44. На какой угол надо повернуть оси координат, чтобы координаты точки $M(2;0)$ стали равны между собой?

45. Даны точки $A(3;1)$, $B(-1;5)$ и $C(-3;-1)$. Найти их координаты в новой системе, если оси координат повернуты на угол:

$1) -45^0;\ 2)90^0;\ 3) -90^0;\ 4)180^0.$

46. Начало координат перенесено в точку $O'(-1;2)$, оси координат повернуты на угол $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{5}{12}$. Координаты точек $A(3;2)$, $B(2;-3)$ и $C(13;-13)$ определены в новой системе. Вычислить координаты этих же точек в старой системе координат.

47. Даны три точки: $M(5;5)$, $N(2;-1)$ и $C(12;-6.)$ Найти их координаты в новой системе, если начало координат перенесено в точку N, а оси координат повернуты на угол $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$.

48. В системе OXY дана точка $M(6;-2)$. Найти ее координаты в системе $O'X'Y'$, получающейся из системы OXY переносом начала в точку $O'(3;-4)$ и поворотом на угол $-\operatorname{arctg}\frac{12}{13}$.

49. Полярная ось полярной системы координат параллельна оси абсцисс декартовой прямоугольной системы и одинаково с нею направлена. Даны декартовы прямоугольные координаты полюса $O(3;2)$ и точек $A(5;2)$, $B(3;1)$, $C(3;5)$, $D(3+\sqrt{2};\ 2-\sqrt{2})$ и $E(3+\sqrt{3};\ 3)$. Определить полярные координаты этих точек.

50. Полюс полярной системы координат совпадает с началом декартовых прямоугольных координат, полярная ось направлена по биссектрисе первого координатного угла. Даны декартовы прямоугольные координаты точек

$A(-1;1)$, $B(\sqrt{2};\ -\sqrt{2})$, $C(1;\ \sqrt{3})$, $D(-\sqrt{3};\ 1)$ и $E(2\sqrt{3};\ -2)$. Определить полярные координаты этих точек.

51. Составить уравнение геометрического места точек, одинаково удаленных от начала координат и от точки $A(-3;4)$.

52. Написать уравнение линии, по которой движется точка $M(x;y)$, равноудаленная от начала координат и от точки $A(-4;2)$. Лежат ли на этой линии точки $B(-2;1)$, $C(2;3)$, $D(1;7)$?

53. Составить уравнение геометрического места точек, одинаково удаленных от оси OX и от точки $A(-5;3)$.

54. Определить траекторию точки M, которая движется так, что ее расстояние от точки $A(3;0)$ остается вдвое меньше расстояния от точки $B(-6;0)$.

55. Написать уравнение геометрического места точек, равноудаленных от оси OX и от точки $F(0;2)$, и построить линию по ее уравнению.

56. Найти траекторию точки A, которая движется так, что ее расстояние до точки $B(2;4)$ в два раза меньше, чем до точки $C(-6;2)$.

57. Составить уравнение геометрического места точек, разность квадратов расстояний которых до точек $A(-a;0)$ и $B(a;0)$ равна c.

58. Определить точки пересечения с осями координат линий:

$$1) 2x+5y+10=0;\quad 2) y=3-2x-x^2;\quad y^2=4-x.$$

59. Даны полярные уравнения линий:

$$1) r=2R\cos\varphi;\quad 2) r=2R\sin\varphi.$$

Составить параметрические уравнения этих линий в декартовых прямоугольных координатах, совмещая положительную полуось абсцисс с полярной оси и выбирая в качестве параметра полярный угол φ.

60. Даны параметрические уравнения линий:

$$\begin{aligned} &1) x=t^2-2t+1, && 2) x=\frac{a}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right),\\ &\quad y=t-1; && \quad y=\frac{b}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right); \end{aligned}$$

$$3)x = 2R\cos^2 t, \qquad 4)x = 2\rho\,\mathrm{ctg}^2\, t,$$
$$y = R\sin 2t; \qquad y = 2\rho\,\mathrm{ctg}\, t;$$

исключив параметр t, найти уравнения этих линий в прямоугольной системе координат.

Ответы

1)$M(-11)$; 2)$N(13)$. **3.** (5) и (12). **4.** $A(2;0)$, $B(3;0)$, $C(-5;0)$, $D(-3;0)$, $E(-5;0)$. **5.** $A_1(2;-3)$, $B_1(-3;-2)$, $C_1(1;2)$, $D_1(-3;-1)$. **6.** $A_1(3;-4)$. **7.** 1) (3; 2), (-2; 5). 2) (-3; -2), (2; -5). **8.** 20. **9.** $\varphi = 143^0 08'$. **10.** $(2+\sqrt{2})$, 90^0, 45^0. **11.** $|AB| \approx 11,4$; $\varphi = 127^0 52'$. **12.** 60^0. У к а з а н и е. Вычислить длины сторон треугольника, а затем применить теорему косинусов. **13.** $\dfrac{\sqrt{61}}{2}$. **14.** $M_1(0;28)$ и $M_2(0;-2)$. **15.** M(0; 5), $r = 3\sqrt{5}$. **16.** M(3; -2), $R = 10$. **17.** $\dfrac{10\sqrt{2}}{3}$. **18.** $M_1(2;-4)$, $M_2(-1;1)$, $M_3(-2;2)$. **19.** $\lambda_1 = \dfrac{AB}{BC} = 2$; $\lambda_2 = \dfrac{AC}{CB} = -3$; $\lambda_3 = \dfrac{BA}{AC} = -\dfrac{2}{3}$. **20.** $A(3;-1)$ и $B(0;8)$. **21.** 9 кв. ед. **22.** $C_1(5;2)$ или $C_2(2;2)$. **23.** 5. **24.** 7,4. **25.** 13 кв. ед. **26.** 20 кв. ед. **27.** $\left(-\dfrac{6}{11}; 4\dfrac{1}{11}\right)$. **28.** $C_1(-7;-3)$, $D_1(-6;-4)$ или $C_2(17;-3)$, $D_2(18;-4)$. **29.** $A_1\left(3;-\dfrac{\pi}{4}\right)$, $B_1\left(2;\dfrac{\pi}{2}\right)$, $C_1\left(3;\dfrac{\pi}{3}\right)$, $D_1(1;-2)$, $E_1(5;1)$. **30.** 1) $|AB| = \sqrt{3}$; 2)$|CD| = 10$. **31.** $A(2\sqrt{2};\ 2\sqrt{2})$, $B(0;3)$, $C(3\sqrt{3};-3)$. **32.** $M\left(3\sqrt{2};\ \dfrac{7\pi}{4}\right)$. **33.** S=1 кв. ед. **34.** $C\left(3;\dfrac{5}{9}\pi\right)$, $D\left(5,-\dfrac{11}{14}\pi\right)$. **35.** $M_1(3;0)$, $M_2\left(1;\dfrac{\pi}{3}\right)$, $M_3\left(2;-\dfrac{\pi}{3}\right)$, $M_4\left(5;-\dfrac{\pi}{12}\right)$, $M_5(3;\pi)$, $M_6\left(1;\dfrac{7}{12}\pi\right)$. **36.** *а)*(-2; 1), *б)*(0; 0), *г)*(3; 3). **37.** (12; -22). **38.** (-7; 5). **39.** $A(4;-1)$, $B(0;-4)$, $C(2;0)$. **40.** $x = y'$, $y = x'$. **41.** $x' = 2$, $y' = 0$. **42.** $\varphi = 135^0$. или $\varphi = 135^0$. **43.** 1)$A(\sqrt{2};\ 2\sqrt{2})$, $B(-3\sqrt{2};\ 2\sqrt{2})$, $C(-\sqrt{2};\ -2\sqrt{2})$; 2)$A(1;-3)$, $B(5;1)$, $C(-1;3)$; 3)$A(-1;3)$, $B(-5;-1)$, $C(1;-3)$; 4)$A(-3;-1)$, $B(1;-5)$, $C(3;1)$. **44.** $A(1;5)$, $B(2;0)$, $C(16;-5)$. **45.** $M(6;3)$, $B(0;0)$, $C(5;-10)$. **46.** $M(2;3)$. **47.** $A(2;0)$, $B\left(1;\ -\dfrac{\pi}{2}\right)$, $C\left(3;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$, $D\left(2;-\dfrac{\pi}{4}\right)$, $E\left(2;\dfrac{\pi}{6}\right)$. **48.** $A\left(\sqrt{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right)$, $B\left(2;\ -\dfrac{\pi}{2}\right)$, $C\left(2;\ \dfrac{\pi}{12}\right)$, $D\left(2;\ \dfrac{7}{12}\pi\right)$, $E\left(4;\ -\dfrac{5}{12}\pi\right)$. **49.** $6x - 8y + 25 = 0$. **50.** $2x - y + 5 = 0$. Точки B и D лежат на линии. **51.** $y = \dfrac{x^2}{8} + 2$. **52.** Окружность $x^2 + y^2 = 12x$. **53.** $y = \dfrac{x^2}{4} + 1$.

54. Окружность $3x^2 + 3y^2 - 28x - 28y + 40 = 0$ с центром в точке $\left(\frac{14}{3}, \frac{14}{3}\right)$ и радиусом $R \approx 5,5$. **55.** Прямые $4ax \pm c = 0$. **56.** 1)$x = 2R\cos^2\varphi,\ y = R\sin 2\varphi$; 2)$x = R\sin 2\varphi,\ y = 2R\sin^2\varphi$.

57. 1) $x - y^2 = 0$; 2) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; 3) $x^2 + y^2 - 2Rx = 0$; 4) $2px - y^2 = 0$.

Глава II. Прямая линия

§ 2.1. Уравнение прямой линии с заданным угловым коэффициентом

Чтобы вывести уравнение прямой, надо сначала задать эту прямую.

Теорема 2.1. *Всякой прямой соответствует уравнение первой степени.*

Пусть $M(x, y)$ - произвольная точка прямой (Рис. 2.36). При движении точки M по прямой переменный отрезок BM всегда имеет один и тот же угловой коэффициент. Зная координаты концов этого отрезка $B(0; 6)$, $M(x; y)$, найдем:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{MQ}{BQ} = \frac{y-b}{x} \tag{2.1}$$

уравнению (2.1) удовлетворяют координаты всех точек прямой. Чему не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на прямой.

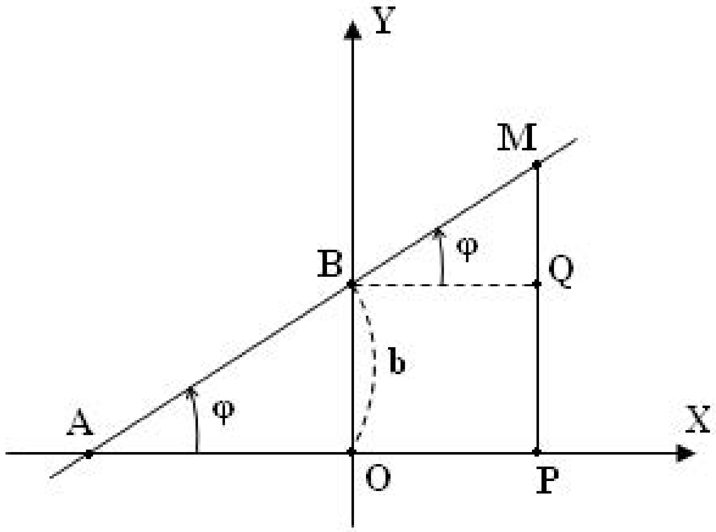


Рис. 2.36

Введем обозначение

$$\operatorname{tg}\varphi = k; \tag{2.2}$$

k - называется угловым коэффициентом прямой, т.е. тангенс угла наклона прямой к оси X. Уравнение (2.1) принимает вид:

$$y = kx + b. \tag{2.3}$$

Уравнение (2.3) называется уравнением прямой с угловым коэффициентом. В этом уравнении x и y являются координатами произвольной точки прямой (текущими координатами), а постоянные для данного уравнения величины b и k называются параметрами уравнения;

Рассмотрим частные случаи уравнения прямой (2.3).

1) $b = 0$, уравнение имеет вид:

$$y = kx. \tag{2.4}$$

Соответствующая прямая проходит через начало координат.

а) Если $k > 0$, то прямая идет вверх (при движении по ней слева направо), причем чем угловой коэффициент больше, тем круче она идет вверх при этом $\left(0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2}\right)$.

б) Если $k < 0$, то прямая идет вниз, и $\left(\dfrac{\pi}{2} < \varphi < \pi\right)$.

2) $k = 0$, уравнение прямой имеет вид:

$$y = b \tag{2.5}$$

Прямая (2.5) параллельна оси абсцисс и отсекает на оси OY отрезок, величина которого равна b.

Задача 2.1. Написать уравнение прямой, наклонной к оси OX под углом $\varphi = 45^0$ и отсекающей на оси OY отрезок $b = -3$.

Решение. Так как в данном случае угловой коэффициент $k = \operatorname{tg} 45^0 = 1$, то уравнение данной прямой таково:

$$y = x - 3.$$

Задача 2. Какой линией изображается уравнение $y = -2x + 5$.

Решение. Так как это уравнение имеет вид (2.3), то оно изображается прямой линией. Эта прямая образует с осью OX угол, тангенс которого равен -2, т.е. $\operatorname{tg} \varphi = -2$. Откуда $\varphi = 116^0 34'$. Прямая отсекает на оси OY отрезок, равный $b = 5$.

Если прямая параллельна оси OY и отсекает на оси OX отрезок, величина которого равна a, то координаты текущей точки $M(x, y)$ прямой имеют одну и ту же абсциссу и удовлетворяют уравнению

$$x = a. \tag{2.6}$$

Это уравнение и будет уравнением данной прямой. В рис. 2.36 данная прямая изображает отрезок MP.

Рассматривая полученные нами уравнения (2.3)-(2.6), убеждаемся, что во всех случаях прямая может быть задана уравнением первой степени относительно переменных x и y.

§ 2.2. Общее уравнение прямой и его исследование

Теорема 2.2 *Всякое уравнение первой степени*

$$Ax + By + C = 0 \tag{2.7}$$

изображается прямой линией.

Уравнение (2.7) называется общим уравнением первой степени с двумя переменными. Докажем, что кроме прямых не существует никаких других линий, имеющих уравнение первой степени.

Решим уравнение (2.7) относительно y :

$$y = -\frac{A}{B}\,x - \frac{C}{B} \qquad (B \neq 0). \tag{2.8}$$

Можно построить прямую, образующую с осью OX угол, тангенс которого равен $-\dfrac{A}{B}$, и отсекающую на оси OY отрезок, равный $-\dfrac{C}{B}$, т.е.

$$k = -\frac{A}{B}, \qquad b = -\frac{C}{B}. \tag{2.9}$$

Подставляя равенства (2.9) в уравнение (2.8), получим уравнение $y = kx + b$. Это уравнение прямой, угловой коэффициент и начальная ордината которой определяются равенствами (2.9).

Наше рассуждение неприменимо в том случае, когда в уравнение (2.7) $B = 0$. В этом случае уравнение (2.7) имеет вид:

$$Ax + C = 0,$$

и его нельзя привести к виду (2.8), т.е. решить относительно y. Поэтому решим его относительно x :

$$x = -\frac{C}{A} = a.$$

Данная прямая параллельна оси OY.

Таким образом доказано, что уравнение первой степени (2.7) всегда изображается прямой.

Уравнение с угловым коэффициентом (2.3) отличается от других видов уравнений первой степени тем, что оно решено относительно y. Всякое уравнение первой степени, в котором $B \neq 0$, можно привести к виду с угловым коэффициентом. Для этого его надо решить относительно y. Коэффициент при x в уравнении, решенном относительно y, есть угловой коэффициент прямой, а свободный член есть отрезок, отсекаемый на оси OY.

Рассмотрим частные случаи уравнение (2.7).

1) $A = 0; \quad B \neq 0, C \neq 0$. В этом случае уравнение принимает вид $By + C = 0; \quad y = -\dfrac{C}{B} = b$. Это уравнение прямой, параллельной оси абсцисс и отсекающей от оси ординат отрезок, величина которого равна b.

2) $A \neq 0; \quad B = 0; \quad C \neq 0$. Уравнение (2.7) принимает вид: $Ax + C = 0$, которое было рассмотрено выше.

3) $A \neq 0; \quad B \neq 0; \quad C = 0$. Уравнение (2.7) имеет вид: $Ax + By = 0; \quad y = -\dfrac{A}{B}\,x$, или $y = kx$, где $k = -\dfrac{A}{B}$. Данная прямая проходит через начало координат.

4) $A = 0; \quad B \neq 0; \quad C = 0$. Уравнение (2.7) имеет вид:

$$y = 0. \tag{2.10}$$

Это уравнение является уравнением оси абсцисс.

5) $A \neq 0; \quad B = 0; \quad C = 0$. Уравнение (2.7) имеет вид

$$x = 0. \tag{2.11}$$

Это уравнение оси ординат.

Таким образом, во всех случаях уравнение $Ax + By + C = 0$, где A и B одновременно не равны нулю, является уравнением прямой линии. Это уравнение называется *общим уравнением прямой.*

Итак, в прямоугольной декартовой системе координат всякая прямая может быть представлена уравнением первой степени, и, обратно, любое уравнение первой степени относительно x и y определяет прямую линию.

Задача 3. Каков геометрический смысл уравнения

$$3x - 2y - 8 = 0\ ?$$

Решение. Это есть уравнение прямой. Решая его относительно y, $\quad y = \dfrac{3}{2}\,x - 4$, получаем, что угловой коэффициент данной прямой $k = \dfrac{3}{2}$, а начальная ордината $b = -4$.

§ 2.3. Уравнение прямой в отрезках

Пусть данная прямая

$$Ax + By + C = 0, \tag{2.12}$$

которая отсекает на оси абсцисс отрезок OA, а на оси ординат отрезок OB. Тогда точка A имеет координаты $(a;\ 0)$, а точка B - координаты $(0;\ b)$ (Рис.2.37). Так как точки лежат на данной прямой, то их координаты должны удовлетворять ее уравнению:

$$Aa + B \cdot 0 + C = 0,$$

$$A \cdot 0 + Bb + C = 0,$$

откуда

$$a = -\frac{C}{A}, \quad b = -\frac{C}{B}. \tag{2.13}$$

Преобразуем уравнение (2.12); перенесем в данном уравнении C направо

$$Ax + By = -C.$$

Разделим данное уравнение на $-C$ $(C \neq 0)$, так как прямая не проходит через начало координат:

$$\frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} = 1.$$

Откуда

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1,$$

или на основании выражения (2.13), получим:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{2.14}$$

Уравнение (2.14) называется *уравнением прямой в отрезках.* В этом уравнении x и y-текущие координаты, a и b параметры. Заметим, что удобно использовать для геометрического построения прямой. Откладывая но оси абсцисс, отрезок, равный по величине a, на оси ординат отрезок, равный по величине b, и соединяя концы этих отрезков, получим искомую прямую (Рис. 2.37).

Задача 4. Уравнение

$$2x - 3y + 9 = 0$$

привести к виду в отрезках.

Решение. Перенося свободный член данного уравнения в правую часть равенства, получим:

$$2x - 3y = -9.$$

Деля обе части равенства на -9, будем иметь:

$$\frac{2x}{-9} + \frac{3y}{9} = 1.$$

Переписывая это уравнение в форме (2.14), получим окончательно:

$$\frac{x}{-4,5} + \frac{y}{3} = 1.$$

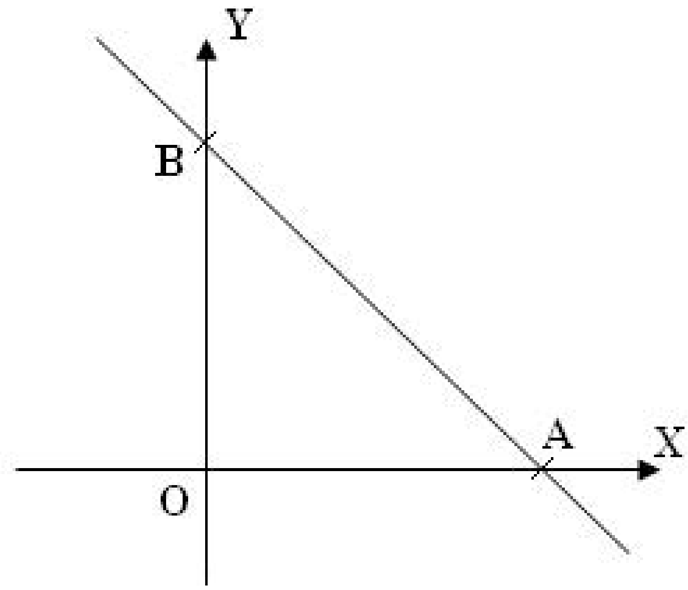


Рис. 2.37

§ 2.4. Параметрические уравнения прямой

Зададим положение прямой на плоскости относительно прямоугольной системы координат некоторой точкой $M_0(x_0;\ y_0)$ прямой и направляющим вектором $\overline{a} = \{m;\ n\}$ (Рис.2.38). Пусть $M(x;\ y)$-произвольная точка прямой, тогда

$$\overline{M_0M} = t \cdot \overline{a}, \tag{2.15}$$

где числовой множитель t может принимать любые значения в зависимости от положения точки M на прямой и

$$\overline{M_0M} = \{x - x_0;\ y - y_0\}, \quad \overline{a} = \{m;\ n\}.$$

Из уравнения (2.15) следует, что

$$x - x_0 = mt, \quad y - y_0 = nt.$$

отсюда находим:

$$x = x_0 + mt, \quad y = y_0 + nt. \tag{2.16}$$

Уравнения (2.16) называют параметрическим уравнением прямой линии.

Таким образом, если прямую задать точкой $M_0(x_0;\ y_0)$ и направляющим вектором $\overline{a} = \{m;\ n\}$, то координаты любой ее точки определяются уравнением (2.16).

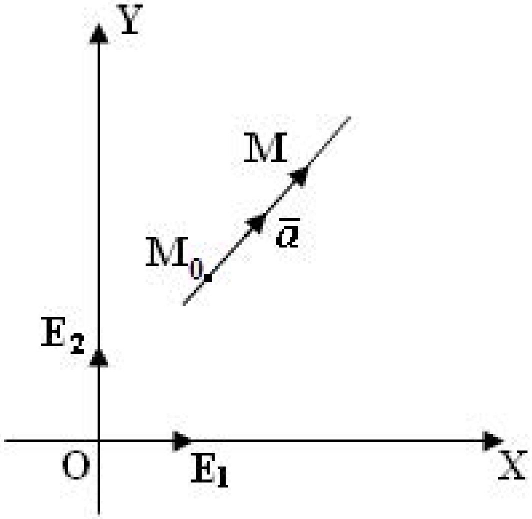


Рис. 2.38

§ 2.5. Нормальное уравнение прямой

Рассмотрим на плоскости прямоугольную декартову систему координат XOY и полярную систему координат, y которой полюс совпадает с началом координат O, а полярная ось совпадает с осью абсцисс. Пусть l-ось проходящая через начала координат и перпендикулярная данной прямой L, т.е. направление l берется от O в сторону данной прямой, p-расстояние от O до данной прямой, t-угол между полярной осью OP и осью l (Рис.2.39).

Для любой точки $M(r;\ \varphi)$ на данной прямой L имеем:

$$np_l\mathbf{OM} = ON = p.$$

С другой стороны

$$np_l\mathbf{OM} = |\mathbf{OM}| \cdot \cos(\varphi - \alpha) = r \cdot \cos(\varphi - \alpha).$$

Следовательно,

$$r \cdot \cos(\varphi - \alpha) = p, \tag{2.17}$$

или

$$r = \frac{p}{\cos(\varphi - \alpha)}. \tag{2.18}$$

Уравнение (2.18) есть уравнение прямой линии в полярных координатах. Преобразуем уравнение (2.17):

$$r \cdot \cos\varphi \cdot \cos\alpha + r \cdot \sin\varphi \cdot \sin\alpha - p = 0$$

Так как в полярных координатах

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

то уравнение (2.17) прямой L в прямоугольной системе координат примет вид:

$$x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha - p = 0. \tag{2.19}$$

Уравнение (2.19) называется *нормальным уравнением прямой.*

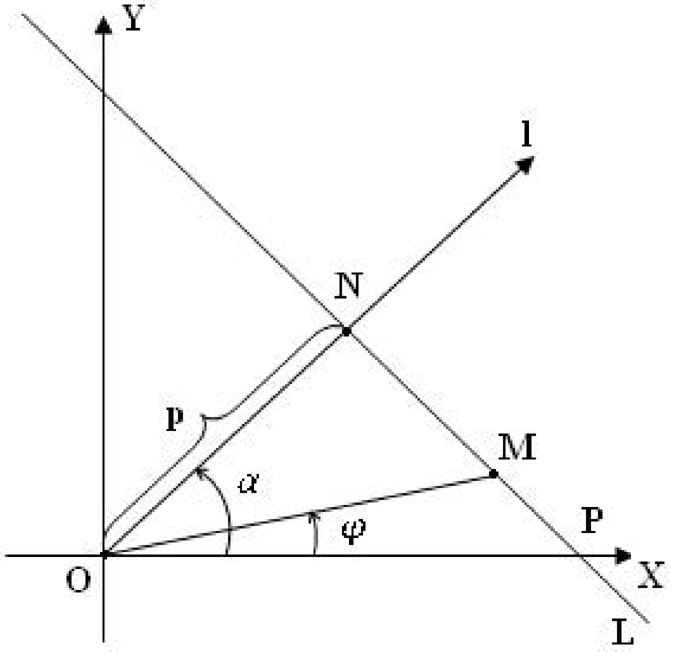


Рис. 2.39

В нормальном уравнении прямой L числа p и l являются параметрами, где p-длина перпендикуляра ON, опущенного из начала координат на прямую, а α-угол наклона l к оси абсцисс.

Заметим, что нормальное уравнение прямой характеризуется двумя особенностями:

1) свободный член его

$$-p \leq 0,$$

2) сумма квадратов коэффициентов при текущих координатах равна единице

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Чтобы привести общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$ к нормальной форме, умножим обе части уравнения на некоторый множитель M :

$$MAx + MBy + MC = 0. \tag{2.20}$$

Подберем множитель M так, чтобы уравнение (2.20) обратилось в нормальное уравнение (2.19), т.е. чтобы выполнялись равенства:

$$MA = \cos\alpha, \quad MB = \sin\alpha, \quad MC = -p. \tag{2.21}$$

Возведем в квадрат и сложим первые два равенства в (2.21), найдем

$$M^2(A^2 + B^2) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Отсюда

$$M = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{2.22}$$

Числа M называется *нормирующим множителем.*

Подставляя найденное значение M в равенства (2.21), получим формулы для $\cos\alpha,\ \sin\alpha$ и p:

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad p = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{2.23}$$

В формуле (2.22) нужно брать знак, противоположный знаку свободного члена C, как это видно из последнего равенства (2.21). При $C = 0$ знак можно выбрать произвольно.

Задача 5. Привести к нормальному виду уравнение прямой $2x - 3y - 6 = 0$.

Решение.

$$M = +\frac{1}{\sqrt{2^2 + (3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{13}}.$$

Умножим на M данное уравнение, получим:

$$\frac{2}{\sqrt{13}}\,x - \frac{3}{\sqrt{13}}\,y - \frac{6}{\sqrt{13}} = 0.$$

Следовательно, $\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$, $\sin\alpha = -\dfrac{3}{\sqrt{13}}$, $p = \dfrac{6}{\sqrt{13}}$.

§ 2.6. Расстояние от точки до прямой

Условимся называть отклонением данной точки от данной прямой число d, равное длине перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую, взятой со знаком плюс, если точка и начало координат лежат по разные стороны от данной прямой, и со знаком минус, если они лежат по одну сторону от прямой. Для точек, лежащих на прямой, отклонение равно нулю.

Пусть дана точка $A(x_0;\ y_0)$ и прямая $x\cdot\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$, и требуется определить расстояние от этой точки до этой прямой.

Опустим из точки A перпендикуляр AN на данную прямую и обозначим его длину через d. Будем рассматривать два случая: 1) когда точка A лежит от данной прямой по другую сторону, чем начало координат, 2) когда точка A лежит от данной прямой с той же стороны что и начало координат (Рис. 2.40 а), б)).

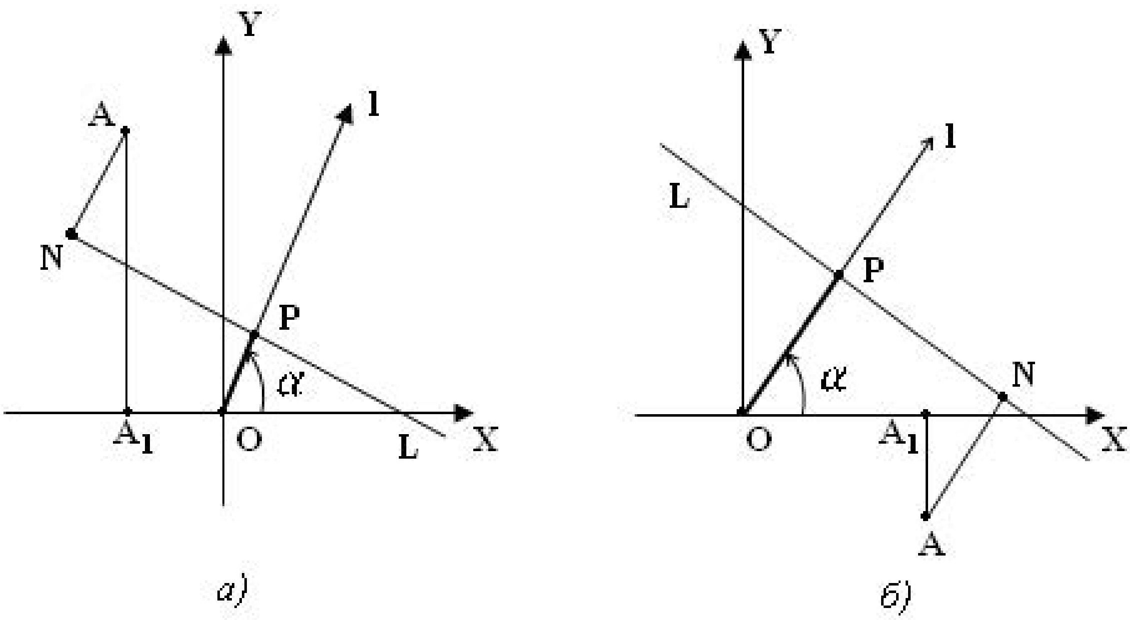


Рис. 2.40

В обоих случаях рассмотрим ломанную OA_1ANP (A_1-проекция точки A на ось OX) и спроектируем эту ломанную на OP. Звенья ломанной будем рассматривать как направленные отрезки. Известно, что проекция ломанной равна проекции замыкающего вектора

$$np_l OA_1ANP = np_l \mathbf{OP}$$

или

$$np_l OA_1 + np_l A_1A + np_l AN + np_l NP = np_l \mathbf{OP}. \tag{2.24}$$

Звено OA_1 принадлежит оси OX, образующей с осью l угол α, поэтому

$$np_l OA_1 = x \cdot \cos\alpha.$$

Звено A_1A принадлежит оси OY, образующей с осью l угол $\alpha - 90^0$, поэтому $np_l A_1A = y_1 \cdot \cos(\alpha - 90^0) = y_1 \cdot \sin\alpha$.

Звено AN параллельно оси l. В первом случае (Рис. 2.40 а)) направление AN противоположно направлению оси l, поэтому $np_l AN = -d$. Во втором случае (Рис. 2.40 б)) направление AN совпадает с направлением оси l, поэтому $np_l AN = d$. Далее $np_l NP = 0$, $np_l \mathbf{OP} = p$ (так как $|OP| = p$). Подставляя вместо всех членов равенства (2.24) найденные выражения, получим в первом случае:

$$x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - d = p,$$

а во втором случае

$$x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha + d = p.$$

Таким образом, либо

$$d = x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p,$$

либо

$$d = -(x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p).$$

Очевидно, расстояние точки от прямой есть абсолютная величина отклонения и вычисляется по формуле:

$$d = |x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p|. \tag{2.25}$$

Следовательно, чтобы получить отклонение точки $A(x_0,\ y_0)$ от данной прямой L, нужно в левую часть нормального направления этой прямой подставить вместо текущих координат координаты данной точки x_0 и y_0.

Если уравнение прямой дано в общей форме $Ax + By + C = 0$, то, приведя, это уравнение к нормальной форме, найдем для расстояния d точки $\widetilde{A}(x_0,\ y_0)$ оси этой прямой формулу:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{2.26}$$

используя формулу (2.26), можно доказать, что биссектрисы углов, образованных прямыми:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

для которых расстояние любой ее точки $M(x,\ y)$ до сторон угла одинаковы, т.е. $d_1 = d_2$, имеют следующие уравнения:

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm\frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \tag{2.27}$$

Задача 6. Найти расстояние от точки $M_0(1,\ 2)$ до прямой $y = 2x + 3$.

Решение. Приведем уравнение прямой к виду $2x - y + 3 = 0$. По формуле (2.26), будем иметь:

$$d = \frac{|2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

Задача 7. Проверить, что прямые $2x + \sqrt{5} \cdot y - 15 = 0$ и $\sqrt{11} \cdot x - 5y +$ $+30 = 0$ касаются к одной и той же окружности с центром в начале координат и вычислить радиус этой окружности.

Решение. Вычислим расстояние от начало координат до прямых:

$$d_1 = \frac{|-15|}{\sqrt{2^2 + (5)^2}} = \frac{15}{\sqrt{9}} = 5,$$

$$d_2 = \frac{|30|}{\sqrt{(11)^2 + (-5)^2}} = \frac{30}{\sqrt{36}} = 5.$$

Радиус окружности $R = 5$.

§ 2.7. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении

Пусть дана точка $M(x_0;\ y_0)$. Напишем уравнение искомой прямой в виде:

$$y = kx + b. \tag{2.28}$$

Пока параметры k и b-неопределенные, уравнение (2.27) может изображаться любой прямой. Чтобы прямая (2.28) проходила через точку M, координаты точки M должны удовлетворять уравнению (2.28)

$$y_0 = kx_0 + b. \tag{2.29}$$

Определяя b из равенства (2.29) и подставляя его в уравнение (2.28), получим искомое уравнение прямой:

$$y - y_0 = k = (x - x_0). \tag{2.30}$$

Уравнение (2.30) называется *уравнением прямой, проходящей через данную точку в данном направлении или уравнением пучка прямых.* В нем x и y-текущие координаты, x_0 и y_0-координаты центра пучка, k-произвольный параметр (угловой коэффициент прямой). При любом определенном значении k уравнение (2.30) есть уравнение одной определенной прямой, проходящей через точку M, а при неопределенном k уравнение (2.30) есть уравнение любой (неопределенной) прямой пучка.

Пусть уравнение прямой задано в общем виде $Ax + By + C = 0$. Если прямая проходит через точку $M(x_0;\ y_0)$, то

$$Ax_0 + By_0 + C = 0.$$

Определим отсюда C; $C = -Ax_0 - By_0$, и подставим в уравнение $Ax + By+$ $+C = 0$. Тогда будем иметь:

$$Ax + By - Ax_0 - By_0 = 0$$

или

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \tag{2.31}$$

Это другой вид уравнения пучка прямых с центром в точке $M(x_0;\ y_0)$.

Задача 8. Составим уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2;\ 3)$ с угловым коэффициентом $k = 2$.

Решение. Уравнение прямой имеет вид $y = 2x + b$. Координаты точки M_0 удовлетворяют уравнению прямой, т.е. $3 = 2 \cdot 2 + b$, откуда $b = -1$. Подставляя значение b в уравнение прямой, получим: $y = 2x - 1$.

Задача 9. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2;\ 3)$ и составляющей с осью OX угол 45^0.

Решение. Воспользуемся уравнением (2.30), где $k = \operatorname{tg} 45^0 = 1$. Тогда $y - 3 = k(x - 3)$, откуда получим $x + y = 0$.

§ 2.8. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

Пусть даны точки $M_1(x_1;\ y_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2)$. Составим уравнение прямой, проходящей через эти точки.

Уравнение пучка прямых линий, проходящей через точку $M_1(x_1;\ y_1)$, имеет вид:

$$y - y_1 = k(x - x_1), \tag{2.32}$$

где k-пока неизвестный угловой коэффициент.

Так как искомая прямая проходит через точку $M_2(x_2;\ y_2)$, то координаты этой точки должны удовлетворять уравнению (2.32);

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1).$$

Отсюда находим

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (x \neq x_2).$$

Подставляя найденное значение k в уравнение (2.32), получим искомое уравнение прямой, проходящей через точки M_1 и M_2, т.е.:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (y \neq y_2). \tag{2.33}$$

Если $y_1 = y_2$, то уравнение искомой прямой $y = y_1$. Уравнение (2.33) называется уравнением прямой, проходящей через две заданные точки.

Задача 10. Составить уравнение прямой линии, проходящей через точки $M_1(2;\ 3)$ и $M_2(5;\ 4)$.

Решение. Подставляя в уравнение (2.33), $x_1 = 2,\ y_1 = 3,\ x_2 = 5,\ y_2 = 4$, получим: $\dfrac{x-2}{5-2} = \dfrac{y-3}{4-3}$, откуда $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-3}{1}$ или $x - 2 = 3y - 9$. Окончательно получим: $x - 3y + 7 = 0$.

§ 2.9. Условие, при котором три данные точки лежат на одной прямой

Пусть даны три точки: $M_1(x_1;\ y_1)$, $M_2(x_2;\ y_2)$ и $M_3(x_3;\ y_3)$.

Уравнение прямой линии, проходящей через точки M_1 и M_2, запишем в форме (2.33). Точка M_3 лежит на этой прямой по условию. Тогда ее координаты удовлетворяют также уравнению этой прямой. Поэтому, искомым условием будет:

$$\frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}. \tag{2.34}$$

Формулу (2.34) также можно получить из условий:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{2.35}$$

Раскрывая уравнения (2.34) и (2.35), можно убедиться, что это-одно и то же уравнение в разных видах.

Задача 11. Провести прямую через точки $M_1(1;\ 8)$ и $M_2(-2;\ 5)$.

Решение. Пусть точка $M_3(x;\ y)$ лежит на этой прямой. По формулу (2.35), имеем:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 8 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Разлагая определитель, получим: $3x - 3y + 21 = 0$ или $x - y + 7 = 0$.

§ 2.10. Угол между двумя прямыми

Пусть даны две прямые L_1 и L_2

$$\left.\begin{aligned} y &= k_1 x + b_1, \\ y &= k_2 x + b_2. \end{aligned}\right\} \tag{2.36}$$

Обозначим угол наклона первой прямой к оси OX через φ_1, а угол наклона второй прямой к оси OX- через φ_2. Обозначим угол между первой и второй прямыми через φ и выразим φ через φ_1 φ_2.

Перенесем каждую прямую, не меняя ее направления, так, чтобы она проходила через начало. При этом углы φ, φ_1 и φ_2 не изменятся. Рассмотрим два случая: 1) $\varphi_2 > \varphi_1$ (Рис.2.41 а), 2) $\varphi_2 < \varphi_1$ (Рис.2.41 б). В первом случае $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, а во втором случае $\varphi = 180^0 + (\varphi_2 - \varphi_1)$.

Углом между первой и второй прямыми называется угол, на который надо повернуть первую прямую против часовой стрелки до совпадения со второй при этом не будем устанавливать на прямых, какое направление считается положительным или отрицательным.

Зная, что $\operatorname{tg}\varphi_1 = k_1$, а $\operatorname{tg}\varphi_2 = k_2$, легко определить $\operatorname{tg}\varphi$. В первом случае

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1}{1 + \operatorname{tg}\varphi_1 \cdot \operatorname{tg}\varphi_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}.$$

Во втором случае

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}[180^0 + (\varphi_2 - \varphi_1)] = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}.$$

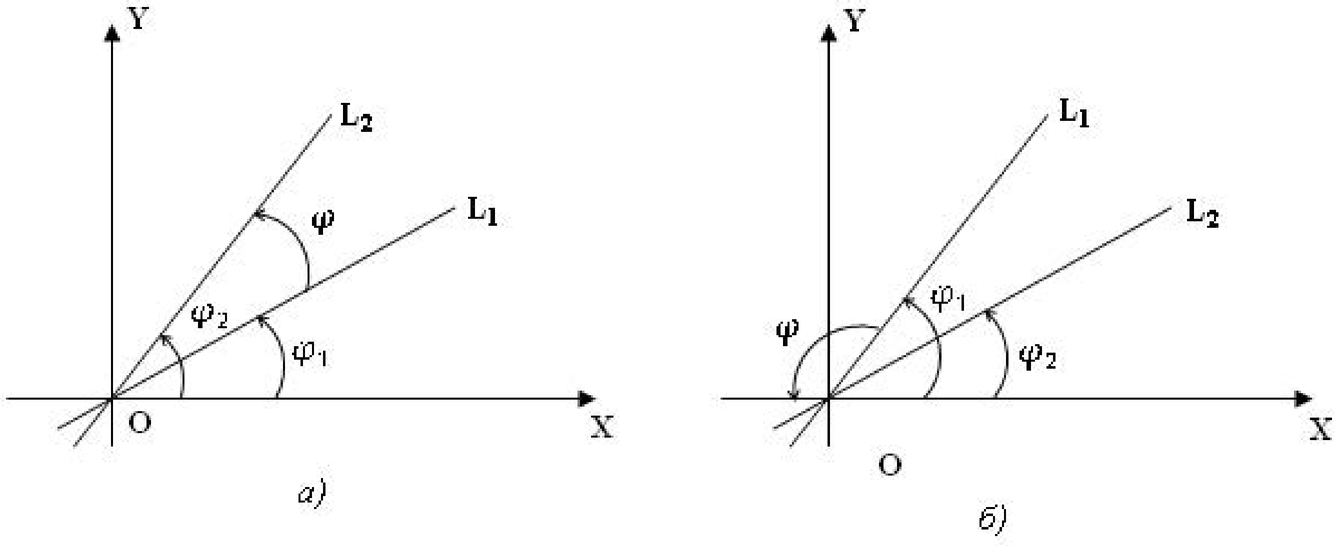


Рис. 2.41

Итак, в обоих случаях имеет место одна и та же формула:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \tag{2.37}$$

Во многих случаях требуется угол между двумя прямыми, для которых не указано какая их них является первой и какая второй. В таком случае в числителе формулы (2.37) можно брать угловые коэффициенты в любом порядке. При одном порядке мы найдем острый угол между прямыми, а при другом-смежный с ним тупой угол, потому что тангенсы смежных углов отличаются только знаком.

Если уравнения прямых даны в общем виде:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

то, приводя их к виду уравнений с угловым коэффициентом

$$y = -\frac{A_1}{B_1}\,x - \frac{C_1}{B_1}, \quad y = -\frac{A_2}{B_2}\,x - \frac{C_2}{B_2},$$

где $k_1 = -\dfrac{A_1}{B_1}$, $k_2 = -\dfrac{A_2}{B_2}$, находим тангенс угла между ними по формуле (2.37):

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-\dfrac{A_2}{B_2} + \dfrac{A_1}{B_1}}{1 + \dfrac{A_1}{B_1} \cdot \dfrac{A_2}{B_2}}.$$

После упрощений имеем:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1}{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}. \tag{2.38}$$

Если порядок прямых не играет роли, то

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1}{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}\right|. \tag{2.39}$$

Задача 12. Найти угол между прямыми $y = 2x + 1$ и $y = 3x + 2$.

Решение. Если перенумеровать прямые в том порядке, как они заданы, то их угловые коэффициенты равны $k_1 = 2$ и $k_2 = 3$. Тогда по формуле (2.37) получим:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{3-2}{1+3\cdot 2} = \frac{1}{7}, \ \varphi \approx 8,13^0.$$

Задача 13. Докажите, что прямые $y = 3x - 1, \ y = \dfrac{1}{7}\,x - 1, \ y = 7 - x$ являются сторонами равнобедренного треугольника.

Решение. Имеем $k_1 = 3, \ k_2 = \dfrac{1}{7}, \ k_3 = -1$. Находим:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2}\right| = \left|\frac{3 - \dfrac{1}{7}}{1 + 3\cdot\dfrac{1}{7}}\right| = 2,$$

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \left|\frac{k_1 - k_3}{1 + k_1 \cdot k_3}\right| = \left|\frac{3+1}{1-3\cdot 1}\right| = 2.$$

Поскольку $\varphi_1 = \varphi_2$, то данный треугольник является равнобедренным.

§ 2.11. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых

Пусть даны две прямые L_1 и L_2 с уравнениями вида (2.36).

Если две прямые параллельны, то угол φ между ними равен нулю, а следовательно, $\operatorname{tg}\varphi = 0$, а это будет тогда, когда в формуле (2.37) числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля. Приравнивая нулю числитель, получим; $k_2 - k_1 = 0$, откуда

$$k_2 = k_1. \tag{2.40}$$

Равенство (2.40) есть условие параллельности двух прямых.

Таким образом, *две прямые параллельны, если они имеют одинаковые угловые коэффициенты.* Верно и обратное положение.

Если две прямые взаимно перпендикулярны, то угол φ между ними равен 90^0 и $\operatorname{tg} 90^0 = \infty$, а это будет тогда, когда в формуле (2.37) знаменатель равен нулю, а числитель отличен от нуля. Приравнивая нулю знаменатель

$$1 + k_1 \cdot k_2 = 0,$$

находим:

$$k_1 \cdot k_2 = -1, \quad k_2 = -\frac{1}{k_1}, \quad k_1 = -\frac{1}{k_2}. \qquad (2.41)$$

Равенство (2.41) есть условие перпендикулярности двух прямых.

Таким образом, *две прямые перпендикулярны, если их угловые коэффициенты обратны по величине и противоположны по знаку.* Верно и обратное положение.

Если уравнения прямых даны в общем виде, то при их угловых коэффициентах

$$k_1 = -\frac{A_1}{B_1}, \quad k_2 = -\frac{A_2}{B_2},$$

условие параллельности примет вид

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}, \qquad (2.42)$$

Таким образом, две прямые параллельны, если коэффициенты при текущих координатах пропорциональны.

Условие перпендикулярности примет вид

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0, \qquad (2.43)$$

т.е. *две прямые перпендикулярны, если сумма произведений их соответствующих коэффициентов при текущих координатах равна нулю.*

Задача 14. Через точку $M(1;\ 4)$ провести параллель и перпендикуляр к прямой $2x + y + 1 = 0$.

Решение. Используем формулу уравнения прямой, проходящей через заданную точку. Предварительно определяем угловой коэффициент прямой $2x + y + 1 = 0$, разрешая ее уравнение относительно y; $y = -2x - 1$, $k_1 = -2$. Угловой коэффициент параллельной прямой будет тот же самый $k_2 = k_1 = -2$. Подставляя в уравнение $y - 4 = k_2(x - 1)$, найдем уравнение параллели к данной прямой

$$y - 4 = -2(x - 1) \quad \text{или} \quad 2x + y - 6 = 0, \quad (L_1).$$

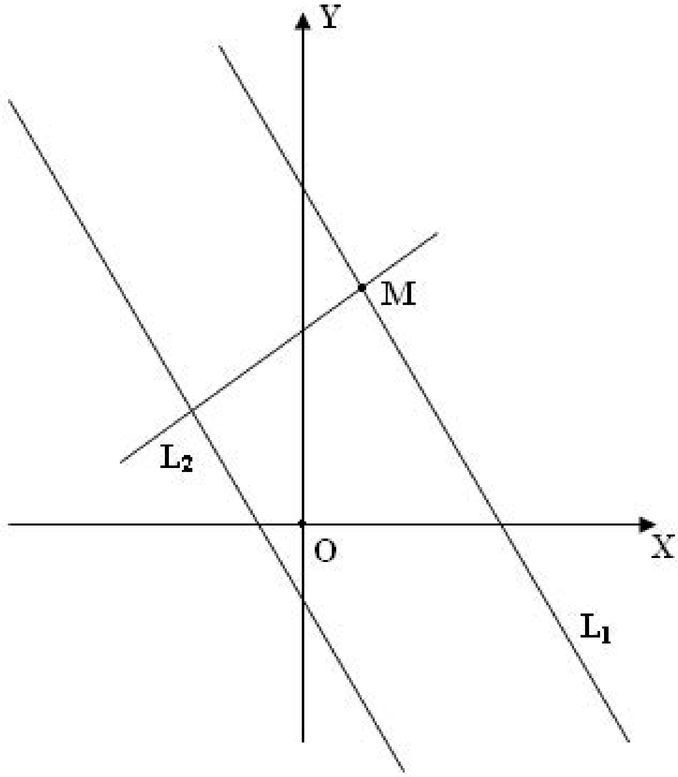


Рис. 2.42

Угловой коэффициент k перпендикулярной прямой определим из условия $k = -\dfrac{1}{k_1}$, т.е. $k = -\dfrac{1}{-2} = \dfrac{1}{2}$. Следовательно, уравнение перпендикуляра (Рис. 2.42)

$$y - 4 = \frac{1}{2}\,(x-1) \quad \text{или} \quad x - 2y + 7 = 0 \quad (L_2).$$

Задача 15. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $M(-1;\ 1)$ и наклоненных к прямой $2x + 3y - 6 = 0$ под углом 45^0.

Решение. Записывая уравнение прямой в виде $y = 2 - \dfrac{2}{3}\,x$, находим ее угловой коэффициент, т.е. $k_1 = -\dfrac{2}{3}$. Из уравнения

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k - k_1}{1 + k\cdot k_1}\right| \quad \text{или} \quad 1 = \left|\frac{k + \dfrac{2}{3}}{1 - \dfrac{2}{3}\,k}\right|$$

определяем $k = \dfrac{1}{5}$, $k = -5$, откуда находим уравнения прямых:

$$y - 1 = \frac{1}{2}\,(x+1), \quad y - 1 = -5(x+1),$$

или

$$x - 5y + 6 = 0, \quad 5x + y - 4 = 0.$$

§ 2.12. Взаимное расположение двух прямых на плоскости

Если две прямые лежат на плоскости, то возможны три различных случая взаимного расположения их: 1) прямые пересекаются т.е. имеют одну общую точку, 2) прямые параллельны и не совпадают, т.е. не имеют общих точек 3) прямые совпадают, т.е. имеют бесчисленное множество общих точек.

Пусть даны две прямые L_1 и L_2:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \tag{2.44}$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Требуется определить точку пересечения этих прямых. Так как точка, пересечения принадлежит и первой и второй прямой, то ее координаты должны удовлетворять и первому и второму уравнениям. Следовательно, надо решить совместно эти уравнения:

$$x = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}, \quad y = \frac{A_2C_1 - A_1C_2}{A_1B_2 - A_2B_1}. \tag{2.45}$$

Формулы (2.45) и решают поставленную задачу.

Если знаменатель $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$, то из курса высшей алгебры известно, что система уравнений (2.44) имеет единственное решение. Это значит, что прямые L_1 и L_2 пересекаются в одной точке. Ее координаты определяются формулами (2.45).

Пусть теперь $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$. При этом возможны два случая. Либо $A_2C_1 - A_1C_2 = 0$, либо $A_2C_1 - A_1C_2 \neq 0$. При этом, как известно их курса высшей алгебры, система (2.44) имеет либо бесчисленное множество решений, т.е. эти уравнения зависимы, либо вовсе не имеет решения, т.е. системы уравнений (2.44) противоречивы.

Системы уравнения (2.44) зависимы в том случае, если $A_1C_2 - A_2C_1 = 0$, т.е. отношение $\dfrac{C_1}{C_2}$ равно отношениям

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

Таким образом, отношения

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}, \tag{2.45}$$

определяют условия совпадения прямых.

Если же $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$, но $A_1C - A_2C_1 \neq 0$, то система (2.44) не имеет решения. Это значит, что прямые L_1 и L_2 не имеют ни одной общей точки пересечения, т.е. они параллельны. Условие параллельности прямых записывают в виде:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}. \tag{2.46}$$

Пример. Прямые линии

$$x - 2y + 1 = 0 \quad \text{и} \quad 2x - 4y + 5 = 0$$

параллельны, так как

$$\frac{1}{2} = \frac{-2}{-4} \neq \frac{1}{5}.$$

Прямые $x - 2y + 1 = 0$ и $3x - 6y + 3 = 0$ совпадают, так как

$$\frac{1}{3} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}.$$

Задача 16. Найти точку пересечения прямых линий $2x - y - 3 = 0$ и $3x + y - 2 = 0$.

Решение. Составляем систему уравнений

$$\left.\begin{array}{c} 2x - y = 3, \\ 3x + y = 2 \end{array}\right\}$$

и находим ее решение. Складывая второе уравнение с первым, получим $5x = = 5$, откуда $x = 1$. Подставляя значение $x = 1$ во втором уравнении $y = 2 - 3x$, находим $y = -1$. Итак, координаты точки пересечения двух данных прямых суть $x = 1, = y = -1$, т.е. $M(1;\ 1)$.

§ 2.13. Уравнение пучка прямых

В § 2.8 рассматривалось уравнение пучка прямых с центром в заданной точке $M_0(x_0;\ y_0)$. Однако можно и не вычислять координаты центра пучка, а воспользоваться в этом случае другой формой уравнения пучка прямых.

Пусть даны две пересекающиеся прямые L_1 и L_2;

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Надо найти уравнения других прямых, проходящих через центр $M_0(x_0;\ y_0)$ пучка прямых.

Составим уравнение

$$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0, \tag{2.47}$$

где λ- произвольный параметр.

Уравнение (2.47) при любом значении λ есть уравнение прямой, так как оно является уравнением первой степени относительно текущих переменных x и y. Так как прямые L_1 и L_2 проходят через точку $M_0(x_0;\ y_0)$, то координаты этой точки удовлетворяют уравнению данных прямых т.е. $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Следовательно, при каждом значении λ уравнение (2.47) есть уравнение прямой данного пучка.

Пусть $N(m;\ n)$-произвольная точка, отличная от $M_0(x_0;\ y_0)$, лежащая на прямой(2.47). Тогда координаты ее будут удовлетворять этому уравнению, т.е.

$$A_1m + B_1n + C_1 + \lambda(A_2m + B_2n + C_2) = 0.$$

Отсюда следует, что при

$$\lambda = -\frac{A_1m + B_1n + C_1}{A_2m + B_2n + C_2} \tag{2.48}$$

получим из (2.47) уравнение прямой, проходящей через точку $N(m;\ n)$.

Если точки $N(m;\ n)$ будут лежать на второй прямой $L_2:\ A_2x + B_2y+$ $+C_2 = 0$, то формула (2.48), определяющая λ, не будет иметь, смысла, так как $A_2m + B_2n + C_2 = 0$ и параметр λ нельзя подобрать. Следовательно, уравнение (2.47) при различных значениях λ будет определять все прямые пучка, кроме второй.

Уравнение (2.47) называют *уравнением пучка прямых.*

Любые две фиксированные прямые, принадлежащие пучку, называются образующими пучка прямых.

Задача 17. Составить уравнение прямой линии, проходящей через точку пересечения прямых $2x - y - 3 = 0$ и $3x + y - 2 = 0$ и параллельно к прямой $3x - 7y - 13 = 0$.

Решение. Искомое уравнение можно записать в виде:

$$2x - y - 3 + \lambda(3x + y - 2) = 0, \tag{2.49}$$

или

$$(2 + 3\lambda)x + (-1 + \lambda)y - 3 - 2\lambda = 0.$$

Угловой коэффициент данной прямой линии равен:

$$k = \frac{2 + 3\lambda}{1 - \lambda}.$$

Угловой коэффициент прямой $3x - 7y - 13 = 0$, есть $k_1 = \dfrac{3}{7}$. Тогда из условия параллельности прямых $k = k_1$, будем иметь:

$$\frac{2 + 3\lambda}{1 - \lambda} = \frac{3}{7},$$

откуда $7(2 + 3\lambda) = 3(1 - \lambda)$ или $24\lambda = -11$ или $\lambda = -\dfrac{11}{24}$. Подставляя найденное значение λ в уравнение (2.49), будем иметь:

$$2x - y - 3 - \frac{11}{24}(3x + y - 2) = 0.$$

Упрощая данное уравнение, окончательно получим уравнение требуемой прямой:

$$15x - 35y - 50 = 0,$$

или

$$3x - 7y - 10 = 0.$$

Примеры решения задач

Задача 18. Даны вершины треугольника ABC : $A(4;\ 3)$, $B(-3;\ -3)$, $C(2;\ 7)$. Найти:

1) уравнение стороны AB,

2)уравнение высоты CH,

3)уравнение медианы AM,

4)точку N пересечения медианы AM и высоты CH,

5)уравнение прямой, проходящей через вершину C, параллельно стороне AB,

6)расстояние от точки C до прямой AB,

7)сделать чертеж.

Решение. 1) Воспользовавшись уравнением прямой, проходящей через две точки

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},$$

получим:
$$\frac{x-4}{-3-4}=\frac{y-3}{-3-3} \quad \text{или} \quad \frac{x-4}{-7}=\frac{y-3}{-6}.$$
откуда $6(x-4)=7(y-3)$ или $6x-7y-3=0: \ (AB)$.

2)Согласно уравнению прямой AB, т.е. $y=\frac{6}{7}\,x-\frac{3}{7}$, ее угловой коэффициент $K_{AB}=\frac{6}{7}$. С учетом условия перпендикулярности прямых AB и CH, угловой коэффициент высоты CH будет равен $K_{CH}=-\frac{1}{K_{AB}}=-\frac{7}{6}$. Теперь по формуле уравнения прямой, проходящей через заданную точку $C(2;\ 7)$ и имеющей определенное направление K_{CH}

$$y-y_0=K_{CH}(x-x_0)$$

имеем: $y-7=-\frac{7}{6}(x-2)$ или $7x+6y-56=0;\ (CH)$

3) По известным формулам,

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \quad y=\frac{y_1+y_2}{2}$$

находим координаты x и y середины точки M отрезка BC :

$$x_M=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{-3+2}{2}=-0,5;$$

$$y_M=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{-3+7}{2}=2,$$

т.е. $M(0,5;\ 2)$.

4) Для нахождения координат точки N пересечения медианы AM и высоты CH, составляем систему из их уравнений

$$\begin{cases}7x-6y-56=0,\\ 2x-9y+19=0.\end{cases}$$

Решая ее, получим $x=\frac{26}{5};\ y=\frac{49}{15}$, т.е. точка $N\left(\frac{26}{5};\ \frac{49}{15}\right)$.

5)Так как прямая, проходящая через вершину C, то их угловые коэффициенты равны, т.е. $K=K_{AB}=\frac{6}{7}$. По координате точки C и угловому коэффициенту $K=\frac{6}{7}$, составляем уравнение прямой CD :

$$y-7=\frac{6}{7}(x-2) \quad \text{или} \quad 6x-7y+37=0;\ (CF).$$

6) Расстояние от точки C до прямой AB вычисляем по формуле:

$$d = \frac{|\widetilde{A_{x0}} + \widetilde{B_{y0}} + \widetilde{C}|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Тогда, используя уравнение прямой AB и координаты точки $C(2;\ 7)$, имеем:

$$d = |CH| = \frac{6 \cdot 2 - 7 \cdot 7 - 3}{\sqrt{6^2 + (-7)^2}} = \frac{40}{\sqrt{85}} \approx 4,4.$$

7) Решение данной задачи проиллюстрировано на рис.2.47.

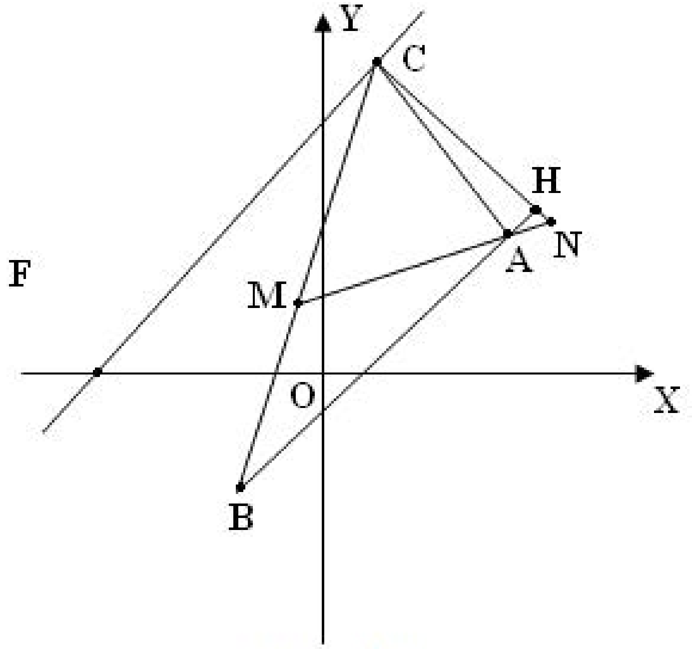


Рис. 2.43

Задача 19. Найти уравнение прямой, отсекающей на оси OY отрезок, равный 2 и образующей с прямой $x - 2y + 3 = 0$, угол в 45^0.

Решение. Уравнение этой прямой будем искать в виде $y = kx + b$.

Угловой коэффициент данной прямой равен $\frac{1}{2}$. Воспользуемся формулой

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}, \quad \text{где} \quad \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg} 45^0 = 1.$$

Пусть $k_1 = \frac{1}{2}$, а $k_2 = k$, тогда $1 = \dfrac{k - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}\,k}$, $\quad 1 + \frac{1}{2} \cdot k = k - \frac{1}{2}$, $\quad \frac{1}{2}\,k = \frac{3}{2}$, $k = 3$.

Следовательно, уравнением искомой прямой будет $y = 3x + 2$.

Пусть теперь $k_2 = \dfrac{1}{2}$, а $k_1 = k$, тогда $1 = \dfrac{\dfrac{1}{2} - k}{1 + \dfrac{1}{2}\,k}$, $\quad 1 + \dfrac{1}{2}\,k = \dfrac{1}{2} - k$, или $\dfrac{3}{2}\,k = -\dfrac{1}{2}$, откуда $k = -\dfrac{1}{3}$.

Следовательно, уравнение $y = -\dfrac{1}{2}\,x + 2$ также будет уравнением искомой прямой.

Таким образом, задача имеет два решения, причем найденные прямые являются взаимно перпендикулярными, так как выполняется условие перпендикулярности двух прямых $3 \cdot \left(-\dfrac{1}{3}\right) = -1$ (Рис. 2.48).

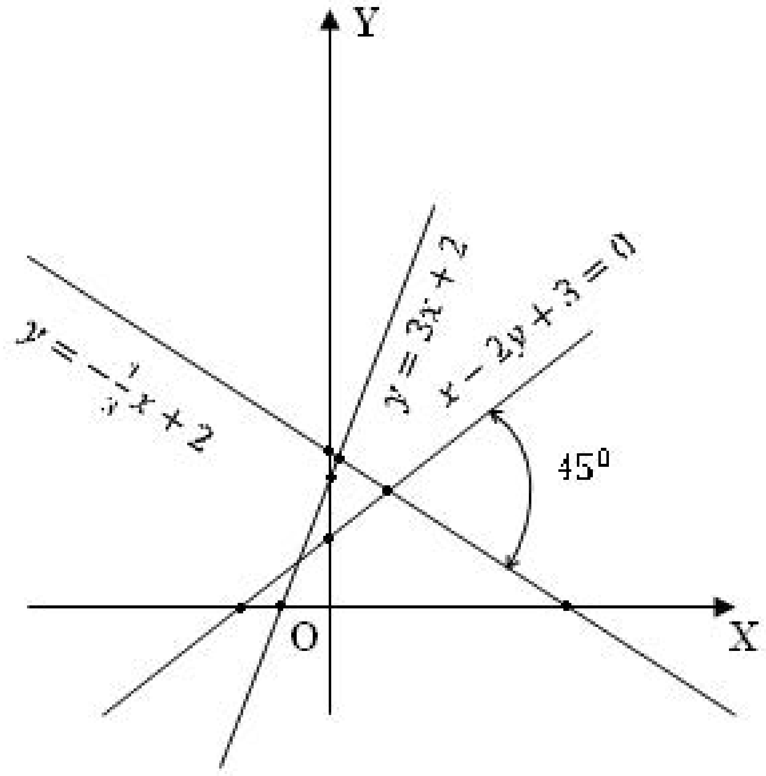


Рис. 2.44

Задача 20. Найти длины сторон и внутренние углы треугольника, стороны которого лежат на прямых:

$$4x - 3y + 7 = 0; \quad 3x + 2y - 16 = 0; \quad x - 5y + 6 = 0.$$

Решение. Чтобы вычислить длины сторон треугольника, необходимо знать его вершины. Решая систему уравнений из данных уравнений, находим вершины треугольника.

Система уравнений первой и третьей прямой

$$\begin{cases} 4x - 3y + 7 = 0, \\ x - 5y + 16 = 0, \end{cases}$$

определяет первую вершину $A(-1;\ 1)$.

Решая систему уравнений первых двух прямых

$$\begin{cases} 4x - 3y + 7 = 0, \\ 3x + 2y - 16 = 0, \end{cases}$$

получим вершину $B(2;\ 5)$.

Из системы уравнений второй и третьей прямой

$$\begin{cases} 3x + 2y - 16 = 0, \\ x - 5y + 6 = 0, \end{cases}$$

находим вершину $C(4;\ 2)$.

По формуле расстояния между двумя точками, вычисляем длины сторон:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(2+1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{25} = 5;$$

$$BC = \sqrt{(4-2)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{13}; \quad AC = \sqrt{(1+1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{26}.$$

Так как $AC^2 < AB^2 + BC^2$, где AC-наибольшая сторона, то треугольник ABC острый (Рис.2.49).

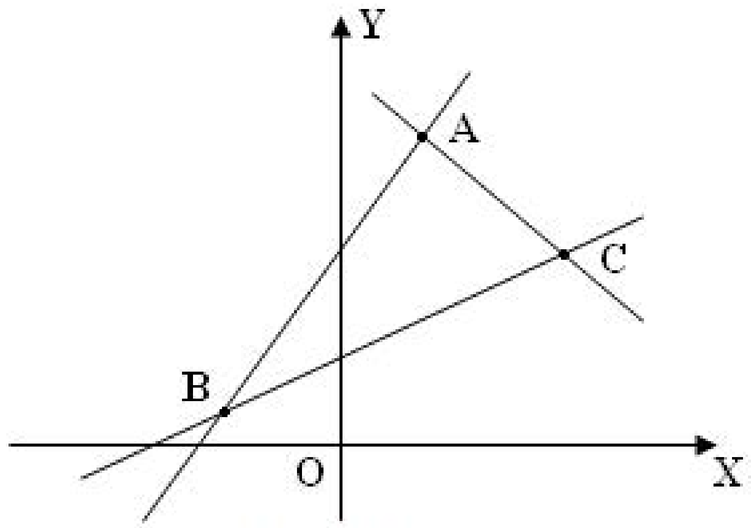


Рис. 2.45

Теперь определим тангенсы углов треугольника ABC по формуле:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}.$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{1 \cdot (-3) - 4 \cdot (-5)}{4 \cdot 1 + 3 \cdot 5} = \frac{17}{19},$$
$$\operatorname{tg} B = \frac{4 \cdot 2 - 3 \cdot (-3)}{4 \cdot 3 + 2 \cdot (-3)} = \frac{17}{6},$$
$$\operatorname{tg} C = \frac{3 \cdot (-5) - 1 \cdot 2}{1 \cdot 3 + 2 \cdot (-5)} = \frac{17}{7}.$$

Задача 21. Написать уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку пересечения медиан треугольника, стороны которого лежат на прямых, заданных уравнениями: $y = 4x + 4$; $y = -x + 4$; $4y = x + 1$.

Решение. Чтобы найти точку пересечения медиан треугольника, необходимо знать его вершины. Решая системы уравнений, составленные из уравнений сторон треугольника, находим вершины треугольника.

1) $\left.\begin{array}{c} y = 4x + 4, \\ y = -x + 4 \end{array}\right\}$, откуда $x = 0$, $y = 4$, т.е. $A(0;\ 4)$.

2) $\left.\begin{array}{c} y = 4x + 4, \\ 4y = x + 1 \end{array}\right\}$, получим: $x = -1$, $y = 0$, т.е. $B(-1;\ 0)$.

3) $\left.\begin{array}{c} y = -x + 4, \\ 4y = x + 1 \end{array}\right\}$, находим: $x = 3$, $y = 1,$ т.е. $C(3;\ 1)$.

Так как точка пересечения медиан треугольника находится в ее точке $M(x;\ y)$ центра тяжести, то используя формулы:

$$x_M = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B + y_C}{3},$$

получим: $x_M = \dfrac{2}{3}$ и $y_M = \dfrac{5}{3}$ т.е. $M\left(\dfrac{2}{3};\ \dfrac{5}{3}\right)$.

Теперь, составляем уравнение прямой линии, проходящей через начало координат $O(0;\ 0)$ и точку $M\left(\dfrac{2}{3};\ \dfrac{5}{3}\right)$, окончательно получим:

$$\frac{x - 0}{\frac{2}{3} - 0} = \frac{y - 0}{\frac{5}{3} - 0} \quad \text{или} \quad 5x - 2y = 0.$$

Задача 22. Написать уравнение прямой, если известно, что расстояние ее от начала координат равна $\sqrt{5}$ и что перпендикуляр, опущенный на нее из начала координат, составляет с осью O_x угол 60^0.

Решение. По условию задачи $p = \sqrt{5}$, $\alpha = 60^0$, поэтому $\cos\alpha = \cos 60^0 = = \dfrac{1}{2}$, $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Подставляя эти значения в начальное уравнение $x \cdot \cos\alpha +$

$+y \cdot \sin\alpha - p = 0$, получим:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\,x + \frac{1}{2}\,y - \sqrt{5} = 0,$$

откуда

$$\sqrt{3}x + y - 2\sqrt{5} = 0.$$

Задача 23. Привести к нормальному виду уравнение прямой $7x+y-3 = = 0$.

Решение. Определим нормирующий множитель по формуле:

$$N = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Здесь $A = 7$, $B = 1$. Перед корнем надо выбрать знак, противоположный знаку свободного члена в заданном уравнении, т.е. знак минус. Тогда будем иметь:

$$N = \frac{1}{\sqrt{7^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{50}} = \frac{1}{5\sqrt{2}}.$$

После умножения обеих частей исходного уравнения на $N = \dfrac{1}{5\sqrt{2}}$, получим:

$$\frac{7}{5\sqrt{2}}\,x + \frac{1}{5\sqrt{2}}\,y - \frac{3}{5\sqrt{2}} = 0,$$

где $p = \dfrac{3}{5\sqrt{2}}$, $\cos\alpha = \dfrac{7}{5\sqrt{2}}$, $\sin\alpha = \dfrac{1}{5\sqrt{2}}$.

Задача 24. Найти расстояние между двумя параллельными прямыми

$$4x - 3y - 16 = 0 \quad \text{и} \quad 4x - 3y - 5 = 0.$$

Решение. Искомое расстояние мы найдем, как расстояние от произвольной точки первой прямой до второй прямой. Возьмем на первой прямой произвольную, точку, например, точку с ординатой $y = 0$. Ее абсцисса будет $x = 4$. Итак, на первой прямой выбрана точка $M(4;\ 0)$. Найдем теперь расстояние этой точки до второй прямой по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

т.е. $d = \dfrac{4\cdot 4 - 3\cdot 0 - 5}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \dfrac{11}{\sqrt{25}} = \dfrac{11}{5}$.

Задача 23а. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(1;\ 5)$ на расстоянии 6 единиц от начала координат.

Решение. Уравнение искомой прямой, как проходящей через точку $M(1;\ 5)$, запишется в виде:

$$y - 5 = k(x - 1)$$

или $kx - y + (5 - k) = 0$. Приведем полученное уравнение к нормальному виду. Нормирующий множитель будет равен:

$$N = \pm\frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}}$$

и уравнение в нормальном виде будет выглядеть так:

$$\frac{k}{\pm\sqrt{1 + k^2}}\, x - \frac{1}{\pm\sqrt{1 + k^2}}\, y + \frac{5 - k}{\pm\sqrt{1 + k^2}} = 0.$$

Сравнивая это уравнение с нормальным уравнением прямой, видим, что прямая удалена от начала координат на величину

$$p = \frac{|5 - k|}{\sqrt{1 + k^2}},$$

которая по условию задачи равна 6. Тогда для определения k получаем такое уравнение:

$$\frac{|5 - k|}{\sqrt{1 + k^2}} = 6.$$

После упрощения получим квадратное уравнение

$$5k^2 + 10k - 19 = 0,$$

откуда $k_1 = -3,2;\ k_2 = 1,2$.

При $k_1 = -3,2$ искомое уравнение имеет вид:

$$y - 5 = -3,2(x - 1),$$

а при $k_2 = 1,2$-имеет вид:

$$y - 5 = 1,2(x - 1).$$

Таким образом, заключаем, что есть две прямые, удовлетворяющие условию задачи:

Задача 24а. Найти уравнение биссектрисы угла между прямыми

$$4x + 2y + 7 = 0 \quad \text{и} \quad 2x - 4y + 15 = 0.$$

Решение. Поскольку расстояние произвольной точки биссектрисы равноудален от обеих прямых, то на основании этого имеем:

$$\frac{4x + 2y + 7}{\sqrt{4^2 + 2^2}} = \pm\frac{2x - 4y + 15}{\sqrt{2^2 + 4^2}},$$

или $\dfrac{4x + 2y + 7}{\sqrt{20}} = \pm\dfrac{2x - 4y + 15}{\sqrt{20}}$. После сокращения на $\sqrt{20}$, получим:

$$4x + 2y + 7 = 2x - 4y + 15$$

и $4x + 2y + 7 = -(2x - 4y + 15)$.

Окончательно уравнения биссектрис получаем в виде:

$$x + 3y - 4 = 0,$$

$$3x - y + 11 = 0.$$

Для уравнений полученных биссектрис выполняются условия перпендикулярности двух прямых $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$, т.е. $1 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) = 0$.

Задача 25. Найти прямую, проходящую через точку пересечения прямых $x+2y+3 = 0$, $2x+3y+4 = 0$ и параллельную прямой $5x+8y = 0$, не находя точки пересечения данных прямых.

Решение. Записываем уравнение пуска прямых, проходящих через точку пересечения данных прямых;

$$x + 2y + 3 + \lambda(2x + 3y + 4) = 0$$

или $(1+2\lambda)x+(2+3\lambda)y+(3+4\lambda) = 0$. Полученное уравнение есть уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$k = -\frac{1 + 2\lambda}{2 + 3\lambda}.$$

Так как данная прямая параллельна прямой $5x + 8y = 0$, у которой угловой коэффициент $k_1 = -\dfrac{5}{8}$, то согласно условию параллельности прямых имеем: $k_1 = k$, т.е.

$$-\frac{1 + 2\lambda}{2 + 3\lambda} = -\frac{5}{8}, \quad \text{или} \quad \frac{1 + 2\lambda}{2 + 3\lambda} = \frac{5}{8},$$

откуда $\lambda = 2$. Подставляя найденное значение параметра λ в уравнение $(1+2\lambda)x+(2+3\lambda)y+(3+4\lambda)=0$, окончательно получим уравнение требуемой прямой, т.е.

$$5x + 7y + 11 = 0.$$

Задача 26. Точки $A(1;\ 2)$ и $C(7;\ 4)$ являются противоположными вершинами квадрата. Определить координаты двух других вершин квадрата.

Решение. Обозначим буквами B и D искомые вершины, т.е. $B(x_2;\ y_2)$ $D(x_4;\ y_4)$. В квадрате $ABCD$ определим расстояние $AB = BC$:

$$AB = \sqrt{(x_2-1)^2+(y_2-2)^2}, \quad BC = \sqrt{(x_2-7)^2+(y_2-4)^2}.$$

отсюда

$$\sqrt{(x_2-1)^2+(y_2-2)^2} = \sqrt{(x_2-7)^2+(y_2-4)^2}.$$

После упрощения, получим:

$$3x_2 + y_2 = 15.$$

Теперь найдем угловые коэффициенты прямых AB и BC. Определяем угловой коэффициент прямой AB : По формуле

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

имеем

$$k_1 = \frac{y_2 - 2}{x_2 - 1},$$

где x_2 и y_2-координаты точки B.

Для прямой BC угловой коэффициент будет равен:

$$k_2 = \frac{y_2 - 4}{x_2 - 7}.$$

Из условия перпендикулярности двух прямых, $k_1 \cdot k_2 = -1$, следует, что

$$\frac{y_2 - 2}{x_2 - 1} \cdot \frac{y_2 - 4}{x_2 - 7} = -1,$$

или

$$(y_2 - 2) \cdot (y_2 - 4) = -(x_2 - 1) \cdot (x_2 - 7).$$

Раскрывая скобки, будем иметь:

$$x_2^2 + y_2^2 - 8x_2 - 6y_2 + 15 = 0.$$

Таким образом, для определения x_2 и y_2, получим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} 3x_2 + y_2 - 15 = 0, \\ x_2^2 + y_2^2 - 8x_2 - 6y_2 + 15 = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим, что $y_2 = 15 - 3x_2$. Подставляя это значение во второе уравнение, получим квадратное уравнение относительно x_2, т.е.

$$x_2^2 - 8x_2 + 15 = 0,$$

откуда $x_2^1 = 3,\ x_2^2 = 5$ и $y_2^1 = 6,\ y_2^2 = 0$.

Значит вершиной B могут служить точки с координатами $(3;\ 6)$ или $(5;\ 0)$.

Проделав аналогичное вычисления, для вершины D, получим координаты $(5;\ 0)$ или $(3;\ 6)$ (Рис. 2.50).

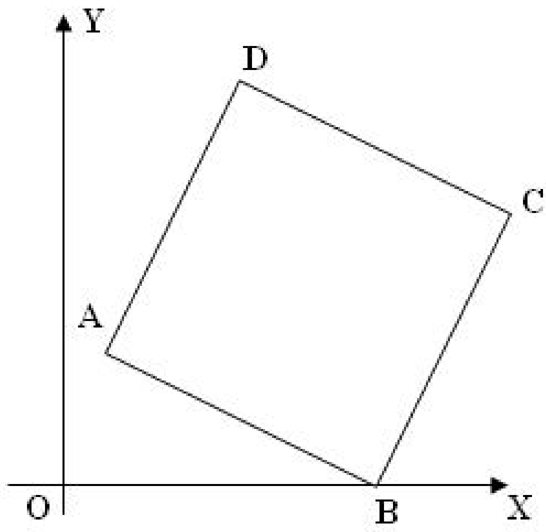


Рис. 2.46

Задача 27. Две стороны квадрата лежат на прямых $x + 2y - 5 = 0$ и $x + 2y - 15 = 0$. Вычислить его площадь.

Решение. Так как для данных прямых выполняется условие их параллельности, т.е. $\dfrac{1}{1} = \dfrac{+1}{+1}$, то на этих прямых лежат противоположные стороны квадрата. Длина стороны квадрата будет равна расстоянию между заданными прямыми.

Возьмем на одной из заданных прямых, например на первой, произвольную точку. Положим $y = 0$, тогда $x = 5$, и найдем расстояние от точки $(5;\ 0)$ до второй прямой по формуле

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}; \quad d = \frac{|1 \cdot 5 + 2 \cdot 0 - 15|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}, \quad d = 2\sqrt{5}.$$

Площадь квадрата равна $S = d^2 = (2\sqrt{5})^2 = 20$ кв.ед.

Задача 28. Издержки перевозок двух видов транспорта выражаются уравнениями $y = 150 + 50x$ и $y = 250 + 25x$, где x-расстояние в сотнях километров; y-транспортные расходы. Начиная с какого расстояния более экономичен второй вид транспорта?

Решение. Точка $M(x_0;\ y_0)$ пересечения двух прямых выражает равные издержки двумя видами транспорта. Решая совместно систему двух прямых:

$$\begin{cases} y = 150 + 50x, \\ y = 250 + 25x, \end{cases}$$

получим $x_0 = 4;\ y_0 = 350$; Поскольку x выражает расстояние в сотнях километров, то очевидно, что при расстоянии $x > 400$км второй вид транспорта является более экономичным.

Ответ: $x = 400$км.

Задачи для самостоятельного решения

1. Построить прямую, отсекающую на оси Oy отрезок $b = 3$ и составляющую с осью Ox угол: 1) 45^0; 2) 135^0; 3) 60^0; 4) 90^0.

2. Определить параметры k и b для каждой из прямых: 1) $2x - 3y = 6$; 2) $2x + 3y = 0$; 3) $y = -3$; 4) $3x + 4y = 12$; 5) $\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{3} = 1$.

3. Определить, какие из точек $M_1(3;\ 1)$, $M_2(2;\ 3)$, $M_3(6;\ 3)$, $M_4(-3;\ -3)$, $M_5(3;\ -1), M_6(-2;\ 1)$ лежат на прямой $2x - 3y - 3 = 0$ и какие не лежат на ней.

4. Найти точку пересечения двух прямых:

1) $3x - 8y + 34 = 0$ и $2x + y - 9 = 0$;

2) $6x + 5y - 16 = 0$ и $3x - 15y - 62 = 0$;

3) $4x - 11y + 17 = 0$ и $8x + 7y + 34 = 0$.

5. Составить уравнение пучка прямых, проходящих через точку:

1) $(3;\ 7)$, 2) $(-2;\ 5)$, 3) $\left(0;\ -\dfrac{7}{3}\right)$, 4) $(0;\ 0)$.

6. Составить уравнение прямой, проходящей через две данные точки:

1) (2; 1) и (3; -5), 2) $\left(4;\ -\dfrac{11}{3}\right)$ и (5; -5) 3)(7; 3) и (12; 3), 4)(0; 0) и (-2; -1), 5)(3; 1) и (3; 5).

7. Определить угол между двумя прямыми:

1)$y = \dfrac{1}{2}\ x - 5$ и $y = 3x + 2$, 2)$y = 3x - 5$ и $y = 3x + 2$,

3)$y = 2x - 1$ и $y = -\dfrac{1}{2}\ + 8$, 4)$y = 2x + 7$ и $y = -5x + 3$.

8. Через точку (8; 6) проведены четыре прямые, образующие с осью Ox углы, относящиеся, как 1: 2: 3: 4. Уравнение второй прямой $3x - 4y = 0$. Найти уравнения трех остальных.

9. Даны координаты вершины четырехугольника $ABCD$:

$$A(2;\ 9),\quad B(-7;\ -1),\quad C(-2;\ 1)\quad \text{и}\quad D(5;\ 7).$$

Найти точку пересечения диагоналей и угол между ними.

10. Вершины четырехугольника $ABCD$ имеют координаты:

$$A(3;\ 6),\quad B(5;\ 2),\quad C(-1;\ 3)\quad \text{и}\quad D(-5;\ 5).$$

Доказать, что $ABCD$-трапеция.

11. Провести прямую:

1) проходящую через точку (2; 5) и параллельную прямой $y = 3x + 8$;

2) проходящую через точку (3; -7) и параллельную биссектрисе нормального координатного угла;

3) проходящую через точку (-3; -4) и перпендикулярную прямой $2x-15y+$ $+4 = 0$;

4) проходящую через точку (1; 3) под углом 45^0 к прямой $3x + y - 4 = 0$;

1. Найти основание перпендикуляра, опущенного:

1) из точки (-1; 7) на прямую $3x - 5y + 4 = 0$;

2) из начала координат на прямую $7x + 2y - 3 = 0$.

12. В равнобедренном прямоугольном треугольнике координаты вершины прямого угла суть (5; 4). Уравнение гипотенузы $x + 5y + 1 = 0$. Составить уравнения катетов.

13. Определить расстояние:

1) от точки (2; -10) до прямой $6x - 8y - 5 = 0$:

2) от точки (3; 1,625) до прямой $6x - 8y - 5 = 0$;

3) от точки (-3; 2) до прямой $3x + 5y - 11 = 0$;

4) от точки (8; 1) до прямой биссектрисы нормального координатного угла.

14. Составить уравнения биссектрисы углов, образованных прямыми $2x-$ $-3y + 8 = 0$ и $6x + 4y - 3 = 0$.

15. Вычислить высоты треугольника ABC, зная координаты его вершины:

1) $A(-2;\ 5),\ B(6;\ 3),\ C(1;\ 9)$;

2) $A(-3;\ -1),\ B(3;\ -2),\ C(-1;\ 2)$.

16. Найти расстояние между параллельными прямыми: 1) $3x-4y-5 = 0$ и $3x - 4y - 15 = 0$; 2) $5x + 12y - 13 = 0$ и $10x + 24y + 39 = 0$.

17. Провести прямую, параллельную прямой $7x+24y-5 = 0$ и отстоящую от нее на расстоянии 3.

18. Через точку (1; 6) провести прямую, расстояние которой от точки (2; -1) равно 5.

19. Провести прямую, проходящую на расстоянии 5 от точки (-5; -4) и на расстоянии 10 от точки (4; 9).

20. Даны две параллельные прямые $3x - 8y + 1 = 0$ и $3x - 8y - 11 =$ $= 0$. Составить уравнение прямой, параллельной им и проходящей посредине между ними.

21. Одна вершина квадрата находится в начале координат, одна его сторона образует с осью Ox угол φ, длина стороны, равна a. Найти уравнения всех сторон квадрата.

22. Через точку (4; 1) провести прямую, отсекающую на координатных осях отрезки, сумма которых равна:

1) 10; 2) 9; 3) 8.

23. Через точку (4; 3) провести прямую, образующую с координатными осями треугольника, площадь которого равна:

1) 27; 2) 24; 3) $13\frac{1}{2}$.

24. Зная вершину треугольника (2; 9) и уравнения двух его высот $5x-8y-3=0$ и $3x+10y-31=0$, найти уравнения сторон.

25. Даны координаты вершин треугольника $ABC:\ A(-13;\ -40), B(14;\ -4),$ и $C(0;\ 44)$.

1) составить уравнения его сторон,

2) определить его углы,

3) составить уравнения его медиан и найти их точку пересечения,

4) составить уравнения его высот и найти их точку пересечения,

5) составить уравнения его биссектрис и найти их точку пересечения.

Ответы

1. 1) $y = x + 3$, 2) $y = -x + 3$, 3) $y = x\sqrt{3} + 3$, 4)$x = 0$.

2. 1) $k = \frac{2}{3}$, $b = -2$; 2) $k = -\frac{2}{3}$, $b = 0$; 3) $k = 0$, $b = -3$; 4) $= -\frac{3}{4}$, $b = -3$; 5) $k = -\frac{3}{4}$, $b = 3$.

3. Точки M_1, M_3 и M_4 лежат на данной прямой; точки M_2, M_5 и M_6 не лежат на ней.

4. 1) (2; 5), 2) $\left(\frac{110}{21}; -\frac{108}{35}\right)$, 3) (5,24; -3,09).

5. 1) $y - 7 = k(x - 3)$, 2) $y - 5 = k(x + 2)$, 3) $y + \frac{7}{3} = kx$, 4) $y = kx$.

6. 1) $6x + y - 13 = 0$, 2) $4x + 3y - 5 = 0$, 3) $y - 3 = 0$, 4) $2x - y = 0$, 5) $x - 3 = 0$.

7. 1) $\varphi = 45^0$, 2) $\varphi = 0$, 3) $\varphi = 90^0$, 4) $\varphi \approx 37^0 53'$.

8. Первая: $x - 3y + 10 = 0$, третья: $13x - 9y - 50 = 0$, четвертая: $24x - 7y - 150 = 0$.

9. (-1; 3), $\varphi \approx 29^0 45'$.

10. 1) $3x - y - 1 = 0$, 2) $x - y - 10$. 3) $15x + 2y + 53 = 0$, 4) $2x - y + 1 = 0$ и $x + 2y - 7 = 0$.

11. 1) (2; 2), 2) $\left(\frac{21}{53}; \frac{6}{53}\right)$.

12.. $3x + 2y - 23 = 0$ и $2x - 3y + 2 = 0$.

13. 1) $d = 8,7$; 2) $d = 0$; 3) $d = -\frac{5\sqrt{34}}{17}$; 4) $d = \frac{7\sqrt{2}}{2}$.

14. $2x + 10y - 19 = 0$ и $5x - y + 5 = 0$.

15. 1) $h_a = \frac{56}{13}$, $h_b = \frac{56}{5}$, $h_c = \frac{7\sqrt{2}}{2}$ 2) $h_a = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, $h_b = \frac{20\sqrt{13}}{13}$, $h_c = \frac{20\sqrt{37}}{37}$.

16.1) 2, 2) $\frac{5}{2}$.

17. $7x + 24y - 80 = 0$ и $7x + 24y + 70 = 0$.

18. $4x - 3y + 14 = 0$ и $3x + 4y - 27 = 0$.

19. $24x - 7y + 217 = 0$, $3x - 4y - 26 = 0$, $7x + 24y + 6 = 0$ и $4x + 3y + 7 = 0$.

20. $3x - 8y - 5 = 0$.

21. $x \cdot \sin\varphi - y \cdot \cos\varphi = 0$, $x \cdot \cos\varphi + y \cdot \sin\varphi \pm a = 0$, $x \cdot \sin\varphi - y \cdot \varphi \pm a = 0$ и $x \cdot \cos\varphi + y \cdot \sin\varphi = 0$.

22. 1) $x + 4y - 8 = 0$ и $x + y - 5 = 0$, 2) $x + 2y - 6 = 0$, 3) невозможно.

23. 1) $3x+8y-36=0,\ 3x+2y-18=0,\ 3(\sqrt{17}-3)x-4(\sqrt{17}+3)y+72=0,$ $3(\sqrt{17}+3)x-4(\sqrt{17}-3)y-72=0;$ 2) $3x+4y-24=0,\ 3(1-\sqrt{2})x+4(1+$ $+\sqrt{2})y-24=0,\ 3(1+\sqrt{2})x+4(1-\sqrt{2})y-24=0;$ 3) $3x-y-9=0$ и $3x-16y+36=0.$

24. $8x+5y-61=0,\ x-4y-3=0$ и $10x-3y+7=0.$

25. 1) Уравнение $AB:\ 4x-3y-68=0$, уравнение $BC:\ 24x+7y-308=0$, уравнение $CA:\ 84x-13y+572=0;$ 2) $A\approx 28^0 04',\ B\approx 126^0 52',\ C\approx 25^0 04';$ 3) уравнение медианы из $A:\ 3x-y-1=0$, из $B:\ 12x+51y-4=0$, из $C:\ 132x+y-44=0$; точка пересечения медиан: $\left(\dfrac{1}{3};\ 0\right)$; 4) уравнение высоты из $A:\ 7x-24y-869=0$, из $B:\ 13x+84y+154=0$, из $C:\ 3x+4y-$ $-176=0$; точка пересечения высот: $\left(77;\ -\dfrac{55}{4}\right)$; 5)уравнение биссектрисы из $A:\ 19x-8y-73=0$, из $B:\ 2x+11y+16=0$, из $C:\ 46x+3y-132=0$; точка пересечения биссектрис: (3; -2).

Глава III. Кривые второго порядка

§ 3.1. Общее уравнение кривой второго порядка и его исследование

Общее уравнение второй степени имеет вид

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \tag{3.1}$$

где коэффициенты A, B, C одновременно в нуль не обращаются и коэффициенты при xy, x и y записываются в виде $2B, 2D, 2E$ для большей симметричности получающихся в дальнейшем формул.

Линия называется линией (кривой) второго порядка, если она определяется уравнением второй степени относительно текущих координат x и y, т.е. уравнением вида (3.1). Таких линий четыре: окружность, эллипс, гипербола и парабола. Они играют большую роль в математике, естествознании и технике. С помощью преобразования системы координат уравнение линии второго порядка может быть приведено к простейшему (каноническому) виду, т.е. уравнение (3.1) может изображаться всевозможными вышеназванными кривыми второго порядка в зависимости от значений коэффициентов A, B, C, D, E и F.

Посмотрим, какие кривые определяются этим уравнением при различных значениях его коэффициентов.

С л у ч а й 1. Пусть в уравнении (3.1) $A = C \neq 0,\ B = 0$. Тогда после деления на A оно примет вид:

$$x^2 + y^2 + \frac{2D}{A}\,x + \frac{2E}{A}\,y + \frac{F}{A} = 0.$$

Перепишем данное уравнение следующим образом:

$$\left(x^2 + \frac{2D}{A}\,x\right) + \left(y^2 + \frac{2E}{A}\,y\right) + \frac{F}{A} = 0$$

Дополним выражения в скобках до полных квадратов. Для этого к левой и правой частям уравнения прибавим $\dfrac{D^2}{A^2} + \dfrac{E^2}{A^2}$; уравнение примет вид:

$$\left(x + \frac{D}{A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{A}\right)^2 = \frac{D^2}{A^2} + \frac{E^2}{A^2} - \frac{F}{A}, \tag{3.2}$$

Перенесем начало координат в точку $O_1\left(-\dfrac{D}{A};\ -\dfrac{E}{A}\right)$. Тогда обозначая

$$X = x + \frac{D}{A}, \quad Y = y + \frac{E}{A}, \quad M = \frac{D^2}{A^2} + \frac{E^2}{A^2} - \frac{F}{A},$$

получим

$$X^2 + Y^2 = M. \tag{3.3}$$

где X и Y - координаты в новых осях.

Введя обозначения $a = -\dfrac{D}{A}$ и $b = -\dfrac{E}{A}$ в уравнение (3.2), получим:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = M. \tag{3.4}$$

В случае $M > 0$ уравнение (3.4) определяет уравнению окружности с центром в точке $(a;\ b)$ и радиусом $R = \sqrt{M}$; в случае $M = 0$ уравнению (3.3) удовлетворяет единственная пара чисел $(a;\ b)$ (будем говорить, что "окружность выродилась в точку"); в случае $M < 0$ уравнению (3.3) не удовлетворяет ни одной паре чисел (окружность "мнимая").

Уравнение (3.2) является также уравнением окружности с центром в начале координат и радиусом $R = \sqrt{M}$.

С л у ч а й 2. Пусть в уравнение (3.1) $A > 0,\ C > 0$ и $B = 0$. Перепишем уравнение (3.1) следующим образом:

$$A(x^2 + 2Dx) + C(y^2 + 2Ey) + F = 0. \tag{3.4}$$

Дополним выражения в скобках до полных квадратов и уравнение (3.4) примет вид:

$$A(x^2 + 2Dx + D^2) + C(y^2 + 2Ey + E^2) = D^2 + E^2 - F$$

или

$$A(x+D)^2 + C(y+E)^2 = D^2 + E^2 - F. \tag{3.5}$$

Перенесем начало координат в точку $(-D; -E)$. Тогда обозначая

$$X = x + D, \quad Y = y + E, \quad N = D^2 + E^2 - F,$$

в результате уравнение (3.5) примет вид:

$$AX^2 + CY^2 = N, \tag{3.6}$$

где X и Y - координаты в новых осях. Пусть $N > 0$; разделив обе части уравнения (3.6) на N, получим:

$$\frac{A}{N}\,X^2 + \frac{C}{N}\,Y^2 = 1. \tag{3.7}$$

Введем обозначения $\dfrac{A}{N} = \dfrac{1}{a^2}$ и $\dfrac{C}{N} = \dfrac{1}{b^2}$, будем иметь

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1. \tag{3.8}$$

Это уравнение определяет эллипс.

Если $N = 0$, то уравнение (3.6) определяет только одну точку $X = 0,\ Y = 0$; при $N < 0$ правая часть уравнения (3.6) отрицательна. Следовательно, нет ни одной точки, координаты которой удовлетворяли бы уравнению (3.6). В этом случае уравнение не определяет никакой линии.

С л у ч а й 3. Коэффициенты A и C уравнения (3.1) имеют разные знаки, а коэффициент $B = 0$. Пусть $A > 0$ и $C < 0$. Как и в случае 2 приведем уравнение (3.1) к виду (3.7).

Введем обозначения:

$$\frac{A}{N} = \frac{1}{a^2}, \quad \frac{C}{N} = -\frac{1}{b^2} \quad (\text{так как} \quad C < 0).$$

После этого уравнение (3.7) примет вид:

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1. \tag{3.9}$$

Это уравнение гиперболы. При $N < 0$ также получим уравнение гиперболы.

Пусть $N = 0$. В этом случае уравнение (6) примет вид:

$$Ax^2 + CY^2 = 0.$$

Полагая $A = p^2$ и $C = -q^2$, перепишем его в таком виде:

$$p^2X^2 - q^2Y^2 = 0$$

или

$$(pX - qX)(pX + qY) = 0.$$

Данное уравнение распадается на два уравнения первой степени:

$$pX - qY = 0 \quad \text{и} \quad pX + qY = 0.$$

Каждая из них есть уравнение прямой, проходящей через точку $X = 0,\ Y = 0$, т.е. через точку O_1.

Таким образом, при $N = 0$ уравнение (3.6), а значит и уравнение (3.1), определяет пару пересекающихся прямых.

С л у ч а й 4. Коэффициенты C и B уравнения (3.1) равны нулю ($A \neq 0$). В этом случае уравнение (3.1) примет вид:

$$Ax^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \tag{3.10}$$

Предполагая, что $E \neq 0$, разрешим данное уравнение относительно y

$$y = -\frac{A}{2E}\, x^2 - \frac{D}{E}\, x - \frac{E}{2E}.$$

Введем обозначения:

$$-\frac{A}{2E} = a, \quad -\frac{D}{E} = b, \quad -\frac{F}{2E} = c.$$

Уравнение (3.10) примет вид:

$$y = ax^2 + bx + c. \tag{3.11}$$

Уравнение (3.11) определяет параболу.

Если в уравнении (3.10) $E = 0$, то оно примет вид:

$$Ax^2 + 2Dx + F = 0. \tag{3.12}$$

Пусть x_1 и x_2 - корни этого уравнения. Тогда уравнение (3.12) можно записывать в виде

$$A(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0,$$

откуда

$$x - x_1 = 0 \quad \text{и} \quad x - x_2 = 0,$$

Если $x_1 = m$ и $x_2 = n$ - действительные, то каждые из $x = m$ и $x = n$, определяют прямые линии, параллельные оси Oy. При $x_1 = x_2$ - обе прямые сливаются.

Если дискриминант $D^2 - AF$ уравнении (3.12) отрицателен, то нет ни одной точки, координаты которой удовлетворяли бы уравнению (3.12).

Резюмируя вышесказанное, придем к следующим результатам. Кривая соответствующая уравнению (3.1) при $B = 0$, т.е.

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \tag{3.13}$$

является:

а) окружностью при $A = C$,

б) эллипсом при $AC > 0$,

в) гиперболой при $AC < 0$,

г) параболой при $AC = 0$.

Таким образом, доказана следующая

Теорема. 3.1. Если уравнению (3.1) при $B = 0$ соответствует кривая, то это или эллипс, или окружность, или гипербола, или парабола.

Случай $B \neq 0$ будет рассмотрен отдельно.

§ 3.2. Окружность

Определение 3.1. *Окружностью называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой центром.*

Пусть точка $C(a;\ b)$ - центр окружности. Расстояние любой точки $M(x;\ y)$ окружности до центра обозначим через R - радиус окружности (Рис. 3.1). По определению

$$|CM| = R,$$

т.е.

$$|CM| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}.$$

Следовательно,

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R.$$

или возводя обе части равенства в квадрат, получим

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \tag{3.1}$$

Этому уравнению удовлетворяют координаты точек, лежащих на окружности, и только они. Координаты всякой точки $M_2(x_2;\ y_2)$, лежащие вне окружности не будут удовлетворять уравнению (3.1). Уравнение (3.1) называется *нормальным* уравнением окружности. В нормальное уравнение окружности входят три параметра: координаты центра $a;\ b$ и радиус R; переменные x и y являются координатами произвольной точки окружности. В частности, если начало координат выбрано в центре окружности, то $a = b = 0$, и уравнение (3.1) принимает более простой вид.

$$x^2 + y^2 = R^2. \tag{3.2}$$

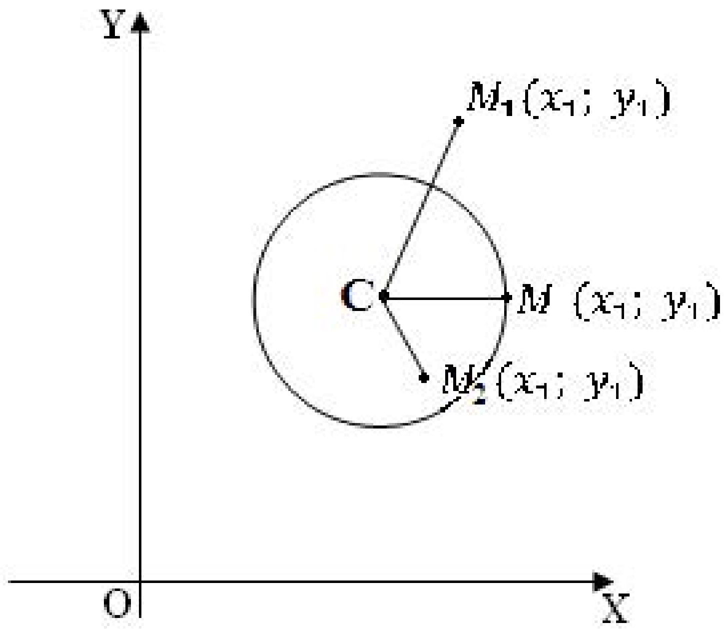


Рис. 3.1

Уравнение (3.2) называется каноническим уравнением окружности.

Следовательно, окружность есть кривая второго порядка и особенности ее уравнения были рассмотрены выше в § 3.1.

Если x' и y' обозначают координаты какой-нибудь точки окружности, то касательная к окружности в этой точке имеет уравнение

$$(x-a)(x'-a)+(y-b)(y'-b)=R^2 \tag{3.3}$$

или

$$xx'+yy'=R^2 \tag{3.4}$$

в зависимости от того, определяется ли окружность уравнением (3.1) или (3.2).

Задача 1. Составить уравнение окружности, имеющей центр в точке $C(-3;\ 4)$ и проходящей через начало координат.

Решение. Согласно формуле (3.1) § 3.2, имеем:

$$(x+3)^2+(y-4)^2=R^2.$$

По условию задачи окружность проходит через начало координат, где $x = 0,\ y=0$. Подставляя значения $x=0,\ y=0$ в данное равенство, получим:

$$(0+3)^2+(0-4)^2=R^2$$

или $R^2=25$. Откуда, уравнение окружности имеет вид:

$$(x+3)^2+(y-4)^2=25.$$

Задача 2. Найти центр и радиус окружности, данной уравнением x^2+ $+y^2-2x-6y-6=0$.

Решение: Преобразуем левую часть данного уравнения окружности:

$$x^2-2x+1-1+y^2-2\cdot 3y+9-9-6=0.$$

или $(x+1)^2+(y+3)^2-16=0$,

откуда

$$(x+1)^2+(y+3^2)=16.$$

ответ: $C(-1;\ -3),\ R=4$.

З а м е ч а н и е 3.1. Если в общем уравнении окружности коэффициенты при квадратах координат равны единице, то координаты центра равны половинам коэффициентов при первых степенях соответствующих координат, взятых с обратным знаком, а квадрат радиуса определяется по формуле $R^2=a^2+b^2-F$, где F - свободный член данного уравнения окружности.

§ 3.3. Эллипс и его уравнение

Определение 3.2. *Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек F_1 и F_2, называемых фокусами, есть величина постоянная.*

Для вывода уравнения эллипса выберем систему координат XOY так, чтобы фокусы эллипса лежали на оси абсцисс, выбрав на ней положительное направление от F_1 к F_2. Начало координат возьмем в середине отрезка, соединяющего две данные точки (Рис. 3.2). Обозначим $F_1F_2=2c$. Тогда координаты фокуса F_1 будут $(-c;\ 0)$, а координаты фокуса F_2 будут $(c;\ 0)$.

Возьмем произвольную точку $M(x;\ y)$, лежащую на эллипсе. Соединим точку M с фокусами F_1 и F_2. Длины отрезков MF_1 и MF_2 обозначим соответственно через r_1 и r_2: $MF_1=r_1;\ MF_2=r_2$. Числа r_1 и r_2 называются *фокальными радиусами* точки M эллипса. Из определения эллипса следует, что сумма фокальных радиусов каждой его точки есть величина постоянная. Обозначим ее через $2a$. Тогда для любой точки M лежащей на эллипсе будет:

$$MF_1+MF_2=2a \quad \text{или} \quad r_1+r_2=2a. \tag{3.5}$$

Расстояние между фокусами эллипса обозначим через $2c$:

$$F_1F_2=2c. \tag{3.6}$$

Поскольку одна сторона треугольника всегда короче суммы двух других его сторон, то $2c < 2a$, откуда и

$$c < a. \tag{3.7}$$

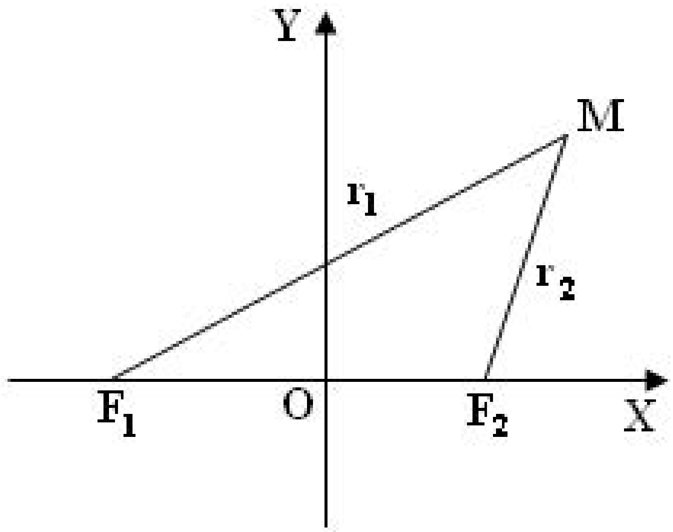


Рис. 3.2

По формуле расстояния между двумя точками имеем:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \tag{3.8}$$

Подставляя значения r_1 и r_2 в уравнение (3.5), получим:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \tag{3.9}$$

Уравнение (3.9) является уравнением эллипса. Однако полученная форма уравнения является неудобной для пользования, поэтому обычно уравнение эллипса дается в ином виде.

Для освобождения уравнения (3.9) от радикалов уединим один из радикалов и возведем обе части уравнения в квадрат:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2,$$

$$2cx = 4a^2 - 2cx - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Снова уединим радикал и разделим обе части уравнения на $4a$:

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx,$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - \frac{c}{a}\, x. \tag{3.10}$$

Теперь опять возведем обе части уравнения (3.10) в квадрат:

$$(x-c)^2+y^2=\left(a-\frac{c}{a}\,x\right)^2,$$

откуда

$$x^2-2cx+c^2+y^2=a^2-2cx+\frac{c^2}{a^2}\,x^2,$$

$$\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)x^2+y^2=a^2-c^2,$$

$$\frac{a^2-c^2}{a^2}\,x^2+y^2=a^2-c^2.$$

Разделим обе части последнего уравнения на $a^2-c^2\neq 0$:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1. \tag{3.11}$$

Так как $2a>2c\geq 0$, то $a^2>c^2$ и $a^2-c^2>0$. Обозначим

$$a^2-c^2=b^2 \tag{3.12}$$

Очевидно, что $b^2<a^2$ и $a<b$. Уравнение (3.11) примет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{3.13}$$

Уравнение (3.13) называется *простейшим* или *каноническим уравнением* эллипса.

По доказанному, всякая пара чисел $x,\ y$ удовлетворяющая уравнению (3.9), удовлетворяет и уравнению (3.13). Можно показать, что и, наоборот, всякая пара чисел $x,\ y$, удовлетворяющая уравнению (3.13), удовлетворяет уравнению (3.9). Таким образом, уравнению (3.13) удовлетворяют координаты точек данного эллипса, и только они.

§ 3.4. Исследование уравнение эллипса

1. С и м м е т р и я э л л и п с а. Так как уравнение (3.13) содержит только квадраты текущих координат, то если точка (x; y) удовлетворяет уравнению (3.13), то пары (x; -y), (-x; y), (-x; -y) также удовлетворяют этому уравнению. Другими словами, если точка $M(x;\ y)$ лежит на эллипсе, то точки $M_1(x;\ -y)$, $M_2(-x;\ y)$, $M(-x;\ -y)$ симметричные точке M соответственно относительно оси OX, оси OY и начало координат O, также

лежат на эллипсе. Отсюда следует, что эллипс является кривой, симметричной относительно обеих осей координат и начала координат. Это позволяет изучение формы и построение эллипса ограничить первым квадратом, а затем получившуюся кривую с помощью зеркального отображения построить во всех четырех квадратах. В случае канонического задания эллипса по формуле (3.13), координатные оси являются *осями симметрии* эллипса. Точка пересечения осей симметрии называется *центром* эллипса. Ось симметрии эллипса, на которой располагаются фокусы, называется *фокальной* осью.

2. Т о ч к а п е р е с е ч е н и я с о с я м и к о о р д и н а т. Точки пересечения эллипса с осями координат называются его *вершинами*. Если в уравнение (3.13) положим $y = 0$, то найдем точки пересечения эллипса с осью OX, т.е. $\dfrac{x^2}{a^2} = 1$, откуда $x = \pm a$. Следовательно, эллипс пересекается с осью OX в двух точках: $A_1(-a;\ 0)$ и $A_2(a;\ 0)$. Таким же образом, полагая в уравнении (3.13) $x = 0$, найдем точки пересечения эллипса с осью OY, т.е. точки $B_1(0;\ -b)$, $B_2(0;\ b)$.

Из уравнения (3.13) следует:

1) $\dfrac{x^2}{a^2} \le 1; \quad x^2 \le a^2; \quad |x| \le a; \quad -a \le x \le a,$

2) $\dfrac{y^2}{b^2} \le 1; \quad y^2 \le b^2; \quad |y| \le b; \quad -b \le y \le b.$

Следовательно, эллипс расположен в прямоугольнике, образованном прямыми $x = \pm a; \quad y = \pm b$.

3. Ф о р м а э л л и п с а. Из канонического уравнения эллипса (3.13) выразим y через x, получим:

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}. \tag{3.14}$$

Так как изучение формы эллипса достаточно провести в первом квадрате, то в этом равенстве надо взять лишь знак плюс, т.е. $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, и предполагать $x \ge 0$.

1) При $x = 0$ имеем $y = b$. Следовательно, точка $B_2(0;\ b)$ лежит на эллипсе.

2) При возрастании x от 0 до a ордината y точки эллипса убывает от b до 0.

3) При $x = a$ имеем $y = 0$. Следовательно, точка $A_2(a;\ 0)$ лежит на эллипсе.

4) При $x > a$ получаем мнимые значения y. Следовательно, точек эллипса,

y которых $x > a$, не существуют. Учитывая вышесказанные соображения и соединяя найденные точки эллипса плавной линией, получим дугу эллипса B_2A_2 в первом квадрате.

Произведя зеркальные отражения дуги B_2A_2 относительно координатных осей, получим весь эллипс (Рис. 3.33).

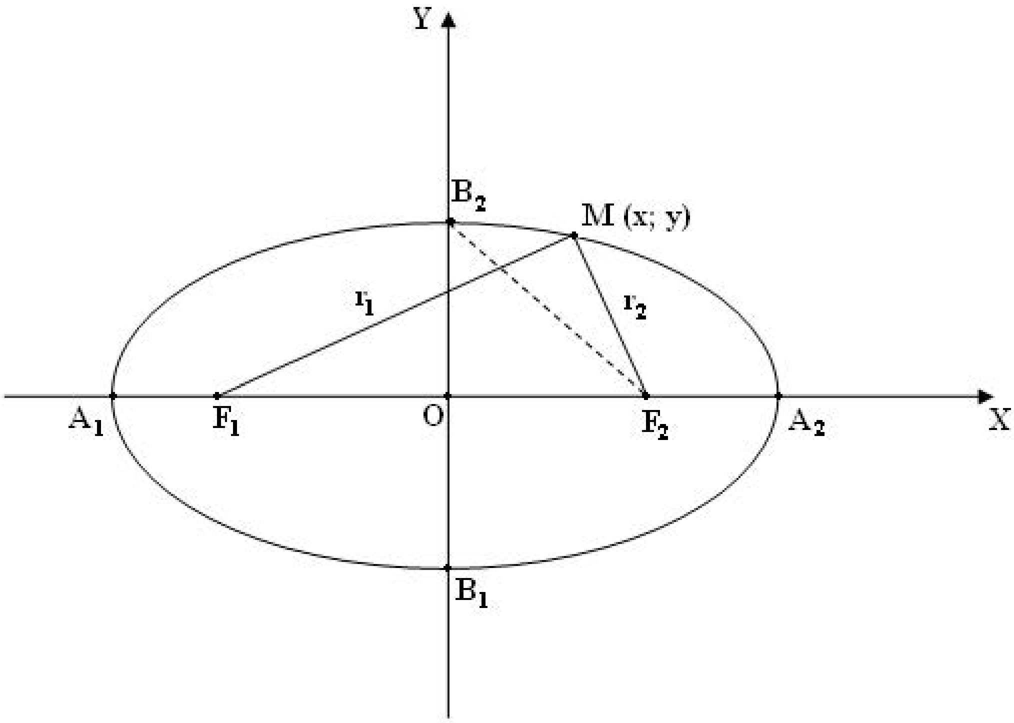


Рис. 3.3

Отрезок A_1A_2 и его длина $2a$ называются *большой осью* эллипса, отрезок OA_2 и его длина a называются *большой полуосью эллипса;* отрезок B_1B_2 и его длина $2b$ называются малой осью эллипса, отрезок OB_2 и его длина b называются малой полуосью эллипса. Длина отрезка $F_1F_2 = 2c$, называется фокусным расстоянием.

Замечание 3.2. 1) Для любой точки M, лежащей на эллипсе, будет $MF_1 + MF_2 = 2a$. В частности. и для вершины B оказывается

$$BF_1 + BF_2 = 2a.$$

Поскольку эллипс является симметричным, то будет $BF_1 = BF_2$. Стало быть, $2 \cdot BF_2 = 2a$, т.е. $BF = a$. Замечая, что BF - гипотенуза прямоугольного треугольника OB_2F_2, катеты которого равны b и c, получаем:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

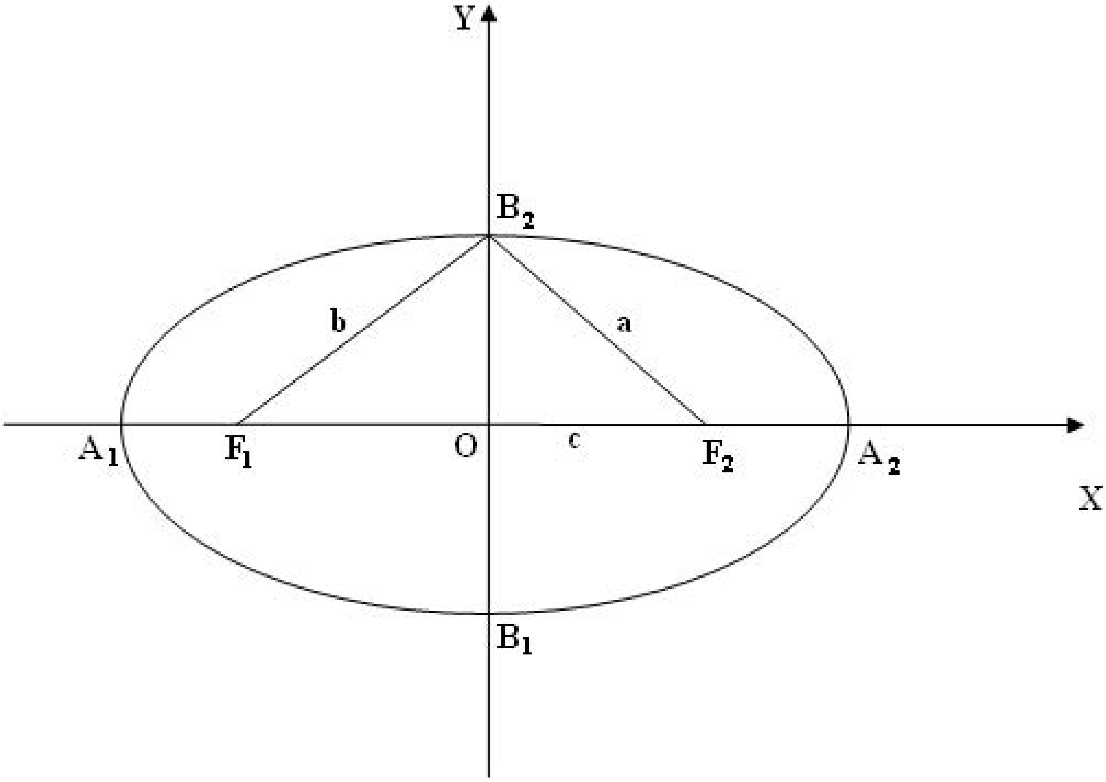


Рис. 3.4

2) При $a = b$, уравнение (3.13) принимает вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

или $x^2 + y^2 = a^2$, т.е. превращается в известное уравнение окружности. Таким образом, окружность можно считать таким эллипсом у которого фокусы совпадают.

4. Э л л и п с к а к с ж а т а я о к р у ж н о с т ь. Сопоставляем уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{3.15}$$

с уравнением окружности

$$x^2 + y^2 = a^2, \tag{3.16}$$

имеющей своим диаметром большую ось эллипса. Пусть M и N - точка эллипса и окружности, имеющие одну и ту же абсциссу x (Рис. 3.5).

Ординаты их обозначим соответственно через y_M и y_N. Полагаем, что $y_M > 0$ и $y_N > 0$. Из уравнений (3.15) и (3.16) вытекает, что $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y_M^2}{b^2} = 1,\ x^2 + y_N^2 = a^2$.

Отсюда

$$y_M = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

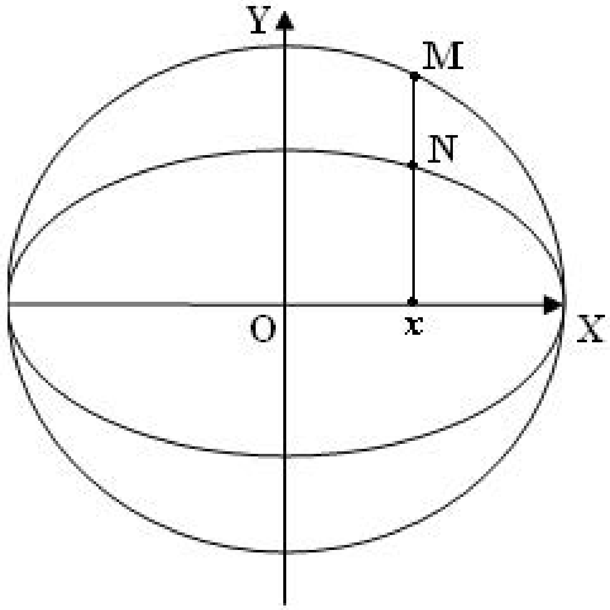


Рис. 3.5

$$y_N = \sqrt{a^2 - x^2},$$

и поэтому

$$y_M = \frac{b}{a}\, y_N. \tag{3.17}$$

Таким образом, ордината каждой точки эллипса получается из ординаты соответствующей точки (имеющей ту же абсциссу) окружности умножением на некоторое число. Это число одно и то же для всех точек эллипса и меньше 1, ибо $b < a$, это показывает, что эллипс (3.15) получен из окружности (3.16) с помощью сжатия в $\dfrac{a}{b}$ раз или что эллипс есть сжатия окружность. Например, эллипс $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ получен из окружности $x^2 + y^2 = 16$ с помощью сжатия в два раза (так как $a = 4,\ b = 2$).

5. Эксцентриситет и фокальные радиусы эллипса. Эксцентриситетом эллипса называется отношение фокусного расстояния $2c$ к длине большой оси $2a$ эллипса, т.е.

$$\frac{2c}{2a} = e \quad \text{или} \quad \frac{c}{a} = e. \tag{3.18}$$

Так как у эллипса $c < a$, эксцентриситет эллипса меньше единицы ($e < 1$). Из равенства (3.18) для e^2 получим выражение:

$$e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2.$$

Из данного равенства видно, что чем меньше отношение $\dfrac{b}{a}$, т.е. чем больше эксцентриситет, тем эллипс становится более "вытянутым". Наоборот, чем больше отношение $\frac{b}{a}$, тем меньше эксцентриситет и эллипс является менее "сжатым". При $b = a$, т.е. когда эллипс обращается в окружность, его эксцентриситет обращается в нуль.

Из равенства (3.10) следует, что

$$r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - \frac{c}{a}\,x,$$

но $r_1 + r_2 = 2a$, следовательно, $r_1 = 2a - r_2$ и $r_1 = a + \frac{c}{a}\,x$. Таким образом,

$$r_1 = a + \frac{c}{a}\,x,$$

$$r_2 = a - \frac{c}{a}\,x, \tag{3.19}$$

так как $e = \frac{c}{a}$, то формулы (3.19) можно переписать в следующем виде:

$$r_1 = a + ex, \quad r_2 = a - ex. \tag{3.20}$$

6. Директрисы эллипса. Рассмотрим прямую $x = l (l > a)$, параллельную оси OY. Вычислим расстояние r_2 произвольной точки $M(x;\ y)$ эллипса от его правого фокуса и расстояние d_2 этой точки M от прямой $x = l$ (Рис. 3.6) и отношение этих расстояний.

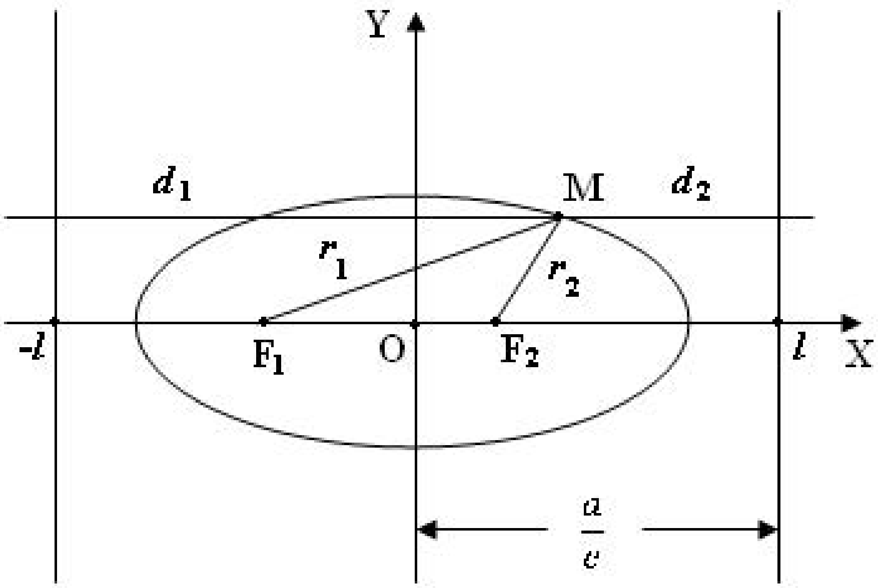


Рис. 3.6

Так как $d_2 = l - x$, то

$$\frac{r_2}{d_2} = \frac{a - ex}{l - x} = e\frac{\frac{a}{e} - x}{l - x}.$$

Если $l = \frac{a}{e}$, то отношение $\frac{r_2}{d_2} = e\frac{l-x}{l-x} = e$ будет сохранять постоянное значение e.

Аналогично, для левого фокуса F_1 и прямой с уравнением $x = -\frac{a}{e}$, получим, что $\frac{r_1}{d_1} = e$.

Эти две прямые $x = \pm l$, перпендикулярные к фокальной оси эллипса и отстоящие на расстоянии $\frac{a}{e}$ от его центра, называются *директрисами эллипса*. Они обладают следующим свойствам: отношение расстояний любой точки эллипса до фокуса и соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная e, т.е. $\frac{r_1}{d_1} = e$ и $\frac{r_2}{d_2} = e$.

Уравнение касательной к эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в точке $M_0(x_0;\ y_0)$, имеет вид:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1. \tag{3.21}$$

Уравнение эллипса с осями, параллельными координатным осям, имеет вид:

$$\frac{(x-x')^2}{a^2} + \frac{(y-y')^2}{b^2} = 1, \tag{3.22}$$

где $(x';\ y')$ - координаты центра эллипса.

Задача 3. Найти полуоси, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса $x^2 + 4y^2 = 16$.

Решение. разделив на 16 обе части уравнения, получим:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (3.13), находим, $a^2 = 16,\ b^2 = 4,\ a = 4,\ b = 2,\ c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 4 = 14,\ c = \pm\sqrt{14} \approx 3,74,\ e = \frac{c}{a} = \frac{3,74}{4} \approx 0,9.$

Таким образом, имеем:

$$a = 4, \quad b = 2, \quad F_1(-3,74;\ 0), \quad F_2(3,74;\ 0), \quad e = 0,9.$$

Задача 4. Эллипс, симметричный относительно осей координат, проходит через точку $M(2;\ \sqrt{3})$ и $B(0;\ 2)$. Написать его уравнение и найти расстояние точки M от фокусов.

Решение. Определим a^2 и b^2 из условия принадлежности эллипсу (3.13) точек M и B. Подставляя координаты этих точек в данное уравнение, получим:

$$\frac{4}{a^2} + \frac{3}{b^2} = 1, \quad \frac{0}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1.$$

Из второго уравнения находим, что $b^2 = 4$. Подставляя найденное значение b^2 в первое уравнение, получим:

$$\frac{4}{a^2} + \frac{3}{4} = 1,$$

откуда $a^2 = 16$.

Таким образом, искомое уравнение будет

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Определим координаты фокусов:

$$c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 4 = 12, \quad \text{или} \quad c = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3},$$

т.е. $F_1(-2\sqrt{3};\ 0)$, $\quad F_2(2\sqrt{3};\ 0)$. По формуле расстояния между двумя точками имеем:

$$MF_1 = \sqrt{(2 + 2\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3} - 0)^2} = \sqrt{32,16} \approx 5,7.$$

$$MF_2 = \sqrt{(2 - 2\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3} - 0)^2} = \sqrt{4,96} \approx 2,2.$$

Замечание 3.3. Вычисляя расстояния точки $M(2;\ \sqrt{3})$ эллипса от его фокусов по формулам $r_1 = a + ex$, $r_2 = a + ex$, мы получили бы не те же самые значения, т.е. $r_1 = 5,7$ и $r_2 = 2,2$.

§ 3.5. Гипербола

Определение гиперболы. Ее каноническое уравнение. Определение гиперболы очень напоминает определение эллипса, надо только в последнем заменить слово "сумма"словом "разность".

Определение 3.3.*Гиперболой называется геометрическое место точек, разность расстояний которых до двух данных точек F_2 и F_1, называемых фокусами гиперболы, есть величина постоянная.* (Эта постоянная должна быть положительной и меньше расстояния между фокусами).

Обозначим эту постоянную величину через $2a (a > 0)$, расстояние между фокусами - через $2c$ (Рис. 3.2). По определению гиперболы

$$F_1M - F_2M = \pm 2a. \tag{3.23}$$

В правой части равенства нужно выбрать знак плюс, если $F_1M > F_2M$, и знак минус, если $F_1M < F_2M$.

Выберем оси координат так же, как при выводе уравнения эллипса, и обозначим $F_1M = r_1, \quad F_2M = r_2$.

Для любой точки гиперболы (и только для точек гиперболы)

$$r_1 - r_2 = \pm 2a \tag{3.24}$$

или

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a. \tag{3.25}$$

Это и есть уравнение гиперболы в выбранной системе координат.

Освобождаясь от радикалов (как в § 3.3), и сделав приведение подобных членов в данном уравнении, получим:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Так как $c > a$, то величина $c^2 - a^2$ положительна. Полагая

$$b^2 = c^2 - a^2, \tag{3.26}$$

получим каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{3.27}$$

Уравнению (3.27) удовлетворяют координаты любой точки, принадлежащей гиперболе и не будут удовлетворять координаты точек, не лежащих на гиперболе.

§ 3.6. Исследование формы гиперболы

1. Точки пересечения с осями координат. Положив в уравнении гиперболы (3.27) $y = 0$, получим $x = \pm a$. Следовательно, гипербола пересекает ось OX в точках $A_1(-a;\ 0)$, $A_2(a;\ 0)$, которые называются вершинами гиперболы. Положив в уравнении гиперболы $x = 0$, получим $-\dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Известно, что в области действительных чисел данное уравнение не разрешимо. Это означает, что с осью OY гипербола вовсе не пересекается. При этом a называется действительной полуосью, b - мнимой полуосью. Число $2a$ есть длина отрезка A_1A_2, а $2b = B_1B_2$ (Рис. 3.3)

2. Область расположения. Запишем уравнение гиперболы в виде:

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2}.$$

Откуда следует, что:

$$\frac{x^2}{a^2} \geq 1, \quad x^2 \geq a^2, \quad |x| \geq a, \quad x \geq a \quad \text{или} \quad x \leq a.$$

Следовательно, все точки гиперболы расположены справа от прямой $x = a$ и слева от прямой $x = -a$ и состоят из двух отдельных ветвей. Когда x увеличивается от a до $+\infty$, то y тоже увеличивается от o до $+\infty$. Кривая имеет форму, изображенную на рис. 3.3. Для любой точки M одной из ветвей $F_1M > F_2M$ и $F_1M - F_2M = 2a$ (правая ветвь), для любой точки M другой ветви $F_2M > F_1M$ и $F_2M - F_1M = 2a$ (левая ветвь).

3. Симметрия гиперболы. Так как уравнение (3.27) содержит только квадраты текущих координат, т.е. не изменяется от замены y на $-y$ и x на $-x$, то кривая гипербола симметрична относительно обеих осей координат. Ось симметрии гиперболы, на которой располагаются фокусы, называется *фокальной* осью. Точка пересечения осей симметрии, называется *центром* гиперболы.

Расстояние $OF_2 = C$ от центра гиперболы до фокуса называется *полуфокусным расстоянием.* Из формулы (3.26) находим:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}. \tag{3.28}$$

4. Асимптоты гиперболы. ***Определение.*** *Прямая L называется асимптотой бесконечной кривой S, если расстояние $d = MN$ (Рис. 3.4) от точки M, находящейся на кривой S, до прямой L стремится к нулю при безграничной удалении точки M вдоль кривой S.*

Определение 3.4. Прямоугольник $ABCD$ (Рис. 3.3), центром которого является начало координат, а стороны параллельны осям и равны соответственно $2a$ и $2b$, называется характеристическим прямоугольником гиперболы (3.27).

Теорема 3.2. *Диагонали характеристического прямоугольника гиперболы являются ее асимптотами.*

Доказательство. По соображениям симметрии достаточно рассмотреть только ту часть гиперболы (3.27), которая лежит в первом координатном угле. Решив уравнение (3.27) относительно y, найдем:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}. \tag{3.29}$$

При $x = a$ ордината y имеет наименьшее значение $y = 0$, с увеличением x ордината y монотонно растет, причем когда x растет неограниченно, то и y также растет неограниченно.

При больших значениях x постоянное число a^2 в формуле (3.29) мало сравнительно с x^2 и ордината y близка к $\frac{b}{a}\sqrt{x^2} = \frac{b}{a}\,x$. Рассмотрим прямую $Y = \frac{b}{a}\,x$. Откуда следует, что если взять точку M гиперболы (3.29) с некоторой абсциссой x и точку N прямой $Y = \frac{b}{a}\,x$ с той же абсциссой x, то при $x \to \infty$ ордината y точки M будет близка к ординате Y точки N. Следовательно, точка M гиперболы будет близка к точке N прямой $Y = \frac{b}{a}\,x$ (Рис. 3.3).

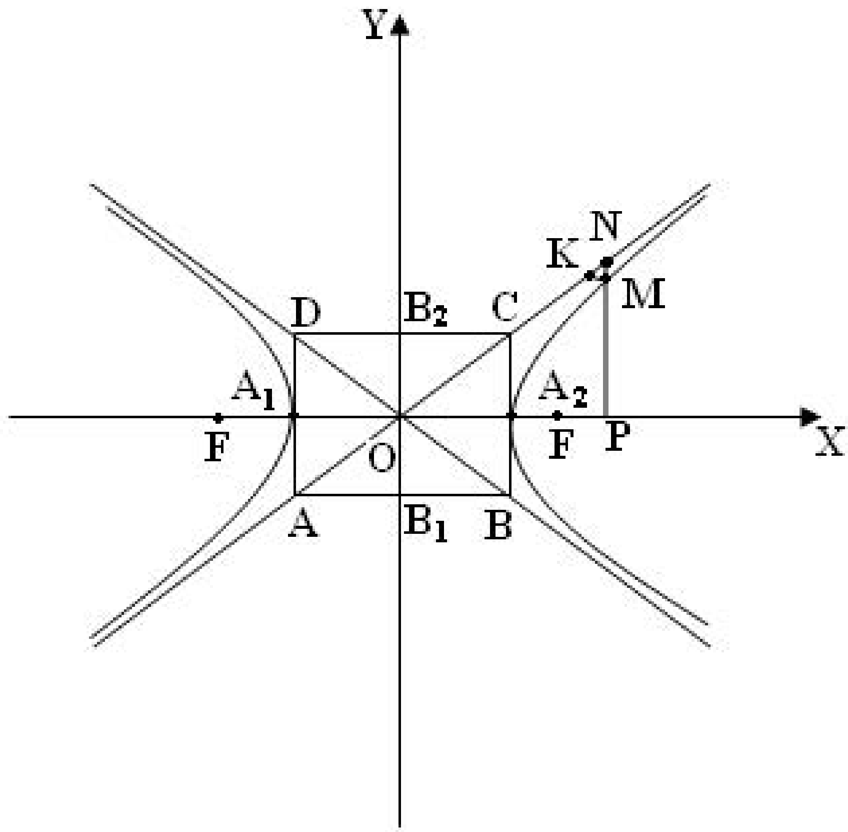


Рис. 3.7

При этом $y < Y$, так как

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} < \frac{b}{a}\sqrt{x^2} = \frac{b}{a}\,x = Y.$$

Покажем, что при неограниченном возрастании x расстояние MN, убывая, стремится к нулю.

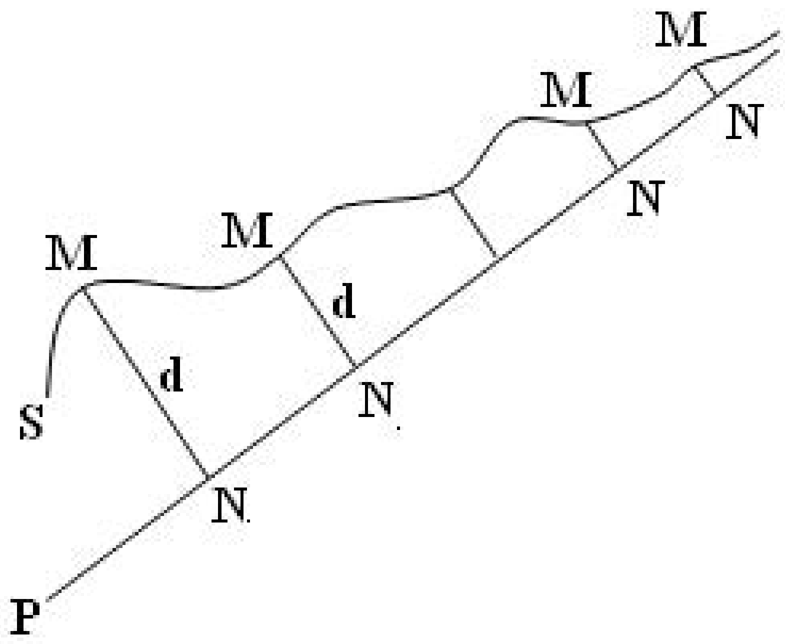


Рис. 3.8

В самом деле,

$$MN = Y - y = \frac{b}{a}\,x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2},$$

откуда

$$MN = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) = \frac{b}{a}\frac{(x - \sqrt{x^2 - a^2})(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 + a^2}}.$$

Переходя к пределу при $x \to \infty$, получим:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 + a^a}} = 0.$$

Так как расстояние MK точки M кривой до прямой $Y = \dfrac{b}{a}\,x$ меньше, чем $MN = Y - y$, то из доказанного следует, что при неограниченном увеличении абсциссы точки гиперболы расстояние от этой точки до прямой $Y = \dfrac{b}{a}\,x$ стремится к нулю. Прямая $y = \dfrac{b}{a}\,x$ называется асимптотой гиперболы (3.27). Из симметрии гиперболы следует, существование второй асимптоты $y = -\dfrac{b}{a}\,x$.

Таким образом, гипербола

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

имеет две асимптоты:

$$y = \frac{b}{a}\,x, \quad y = -\frac{b}{a}\,x. \tag{3.30}$$

Обе асимптоты изображены на рис. 3.3. При вычерчивания гиперболы рекомендуется предварительно начертить ее асимптоты.

Из всего сказанного следует, что гипербола состоит из двух ветвей, приближающихся сколь угодно к асимптотам (3.30).

Каждая асимптота совпадает с предельным положением одной из касательных к гиперболе, когда точка прикосновения неограниченно удаляется по гиперболе.

Касательная к гиперболе

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

в точке $M_0(x_0;\ y_0)$ имеет уравнение:

$$\frac{x{x_0}^2}{a} - \frac{y{y_0}^2}{b} = 1.$$

5.Эксцентриситет и директрисы гиперболы. Отношение полуфокусного расстояния c гиперболы к действительной полуоси a называется *эксцентриситетом* гиперболы:

$$\frac{c}{a} = e \tag{3.31}$$

Так как $c > a$, то эксцентриситет гиперболы больше единицы.

В силу определения гиперболы имеем:

$$r_1 - r_2 = \pm 2a, \tag{3.32}$$

где знак плюс относится к правой ветви гиперболы, а знак минус к левой. С другой стороны найдем:

$$r_1^2 - r_1^2 = 4cx \tag{3.33}$$

Из уравнений (3.32) и (3.33) находим величины r_1 и r_2. Для этого, имеем:

$$(r_1 - r_2)(r_1 + r_2) = 4cx.$$

Принимая во внимание уравнение (3.32), получим:

$$r_1 + r_2 = \pm 2\frac{c}{a}\,x.$$

Решая данное уравнение совместно с уравнением (3.32), получим выражение для фокальных радиусов r_1 и r_2 гиперболы:

$$\left.\begin{array}{c} r_1 = a + \frac{c}{a}\,x = a + ex,\ r_2 = -a + \frac{c}{a}\,x = -a + ex.(\text{правая ветвь});\ r_1 - r_2 = 2a, \\ r_1 = -a - \frac{c}{a}\,x = -a - ex,\ r_2 = a - \frac{c}{a}\,x = a - ex(\text{левая ветвь})\ r_2 - r1 = 2a. \end{array}\right\} \qquad (3.34)$$

Прямые $x = \pm\dfrac{a}{e}$, перпендикулярные к фокальной оси гиперболы и расположенные на расстоянии $l = \dfrac{a}{e}$ от ее центра, называются директрисами гиперболы.

Так как для гиперболы $e > 1$, то $\dfrac{a}{e} < a$ и, следовательно, директрисы гиперболы располагаются между вершинами (Рис.3.5).

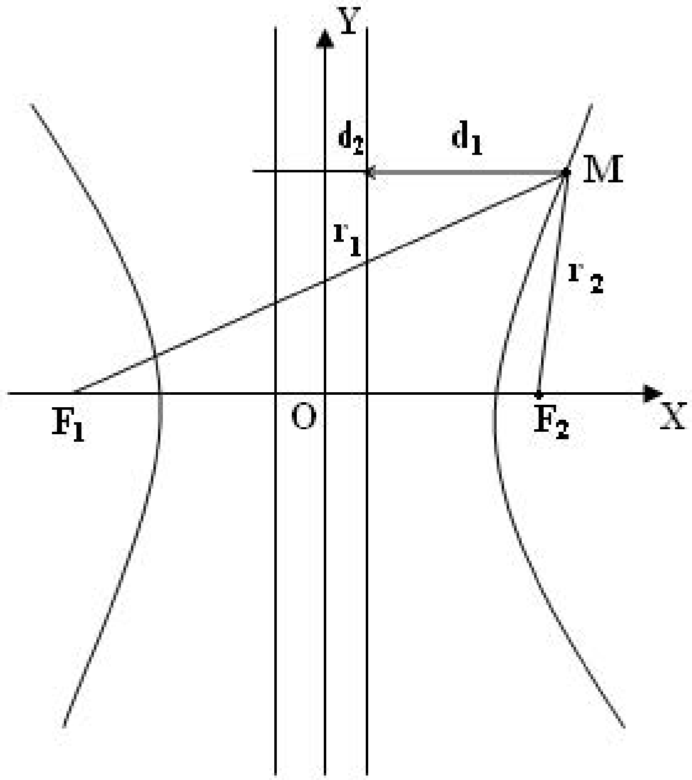


Рис. 3.9

Обозначая через d_1 расстояние точки $M(x;\ y)$ гиперболы до правой и через d_2 - до левой директрис, из рис.3.5 видно, что $d_1 = x - \dfrac{a}{e}$, в случае, если M находится на правой ветви гиперболы, и $d_1 = \dfrac{a}{e} - x$, если точка M лежит на левой ветви. Составим отношение $\dfrac{r_1}{d_1}$, пользуясь формулами (3.34):

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{-a + ex}{x - \dfrac{a}{e}} = \frac{-a + ex}{\dfrac{ex - a}{e}} = e \quad (\text{правая ветвь}),$$

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{a - ex}{\frac{a}{e} - x} = \frac{a - ex}{\frac{a - ex}{e}} = e \quad \text{(левая ветвь).}$$

Таким образом, отношение расстояний любой точки гиперболы до фокуса и соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная e.

6. Равнобочная гипербола. ***Определение.*** *Если характеристическим прямоугольником гиперболы является квадрат, то гипербола называется равнобочной.*

Из определения равнобочной гиперболы следует следующие ее свойства:

1. У равнобочной гиперболы полуоси равны, т.е. $a = b$ (Рис.3.6).

2. Уравнение равнобочной гиперболы имеет вид: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ или $x^2 - y^2 = a^2$.

3. Асимптоты равнобочной гиперболы взаимно перпендикулярны.

4. Асимптоты равнобочной гиперболы имеют уравнения $y = x$, $y = -x$, т.е. они делят пополам углы между осями симметрии гиперболы.

5. Эксцентриситет равнобочной гиперболы $e = \sqrt{2}$. В самом деле, если $a = b$, то формула $c^2 = a^2 + b^2 = 2a^2$, откуда и следует, что $e = \sqrt{2}$.

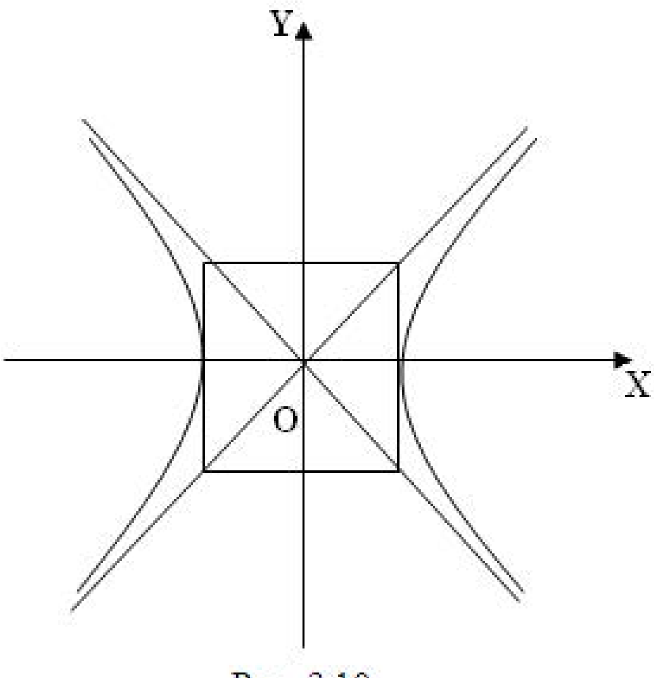


Рис. 3.10

7. Сопряженная гипербола. Две гиперболы называются сопряженными, если они имеют те же оси, но действительная ось одной гиперболы служит мнимой осью другой. Уравнения двух сопряженных гипербол могут быть написаны так:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (3.27)$$

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (3.35)$$

Таким образом гипербола $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$, является сопряженной к гиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Ее фокусы лежат на оси OY, вещественная ось равна $2b$, а мнимая $2a$. Стало быть характеристический прямоугольник гиперболы (3.35) совпадает с характеристическим прямоугольником гиперболы (3.27). Поскольку у взаимносопряженных гипербол общий характеристический прямоугольник (Рис.3.7), то и асимптоты у них общие. Если из двух взаимно сопряженных гипербол одна будет равнобочной, то и вторая такова же. Кроме того, величина c для сопряженных гипербол одинакова. Фокусы и той и другой гипербол лежат на окружности, описанной около прямоугольника $ABCD$ (Рис.3.7).

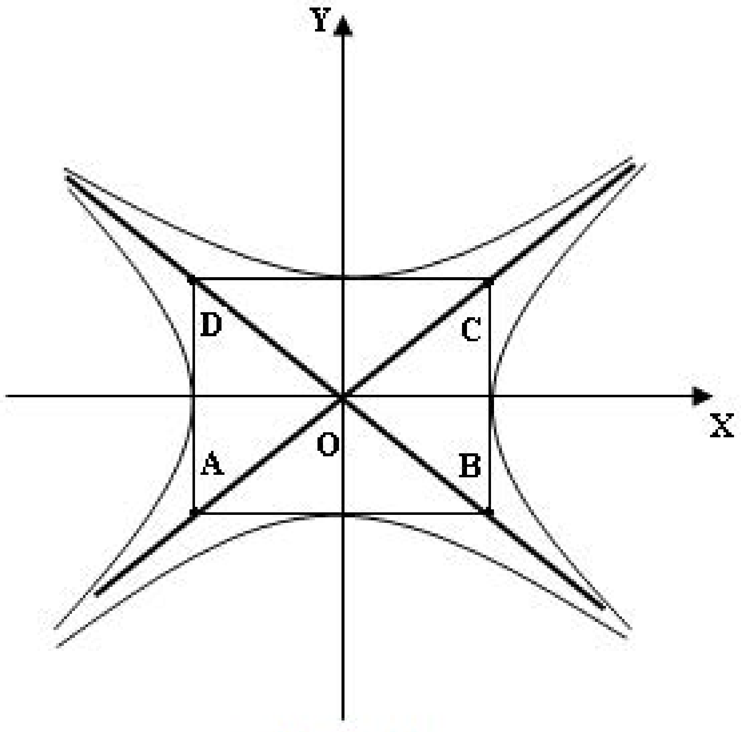


Рис. 3.11

Уравнение гиперболы с осями, параллельными координатным осям, имеет вид:

$$\frac{(x - x_1)^2}{a^2} - \frac{(y - y_1)^2}{b^2} = 1, \qquad (3.36)$$

где $(x_1;\ y_1)$ - точка центра гиперболы.

Если за оси координат принять асимптоты равносторонней гиперболы, то ее уравнение примет вид:

$$xy = m \quad (\text{где } m = \frac{a^2}{2}) \tag{3.37}$$

Рассмотрим график дробно-мнимой функции

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}, \tag{3.38}$$

где $c \neq 0,\ bc - a \cdot d \neq 0$.

Преобразуя (3.38), получим:

$$y = \frac{a\left(x + \frac{b}{a}\right)}{c\left(x + \frac{d}{c}\right)} = \frac{a\left[\left(x + \frac{d}{c}\right)\right] + \frac{b}{a} - \frac{d}{c}}{c\left(x + \frac{d}{c}\right)} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc - a \cdot d}{c^2}}{x + \frac{d}{c}}.$$

Введем новые координаты:

$$x + \frac{d}{c} = x' \quad y - \frac{a}{c} = y'.$$

Обозначим $\dfrac{bc - ad}{c^2} = m$. Тогда в новой системе координат $Ox'y'$, полученной параллельным переносом осей координат, с новым центром в точке $O'\left(-\frac{d}{c};\ \frac{a}{c}\right)$ (Рис.3.8) уравнение примет вид $x'y' = m$.

Итак, график дробно-мнимой функции (3.38) есть равносторонняя гипербола с асимптотами $x = -\dfrac{d}{c},\ y = \dfrac{a}{c}$, параллельными осям координат.

Задача 5. Построить гиперболу $x^2 - 4y^2 = 16$ и ее асимптоты. Определить ее фокусы, вершины и эксцентриситет.

Решение. Приведя уравнение гиперболы к каноническому виду $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{4} = 1$, откуда получим; $a = 4,\ b = 2$, следовательно, ее вершины $A_1(-4;\ 0),\ A_2(4;\ 0),\ B_1(0;\ -2),\ B_2(0;\ 2)$ (Рис.3.39). Через них проводим стороны основного прямоугольника. Его диагонали $y = \pm\dfrac{1}{2}\, x$ являются асимптотами гиперболы. Построим их. Затем через вершины A_1 и A_2 гиперболы проводим ее ветви, приближая их к асимптотам. По формуле $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ находим величину c:

$$c = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}.$$

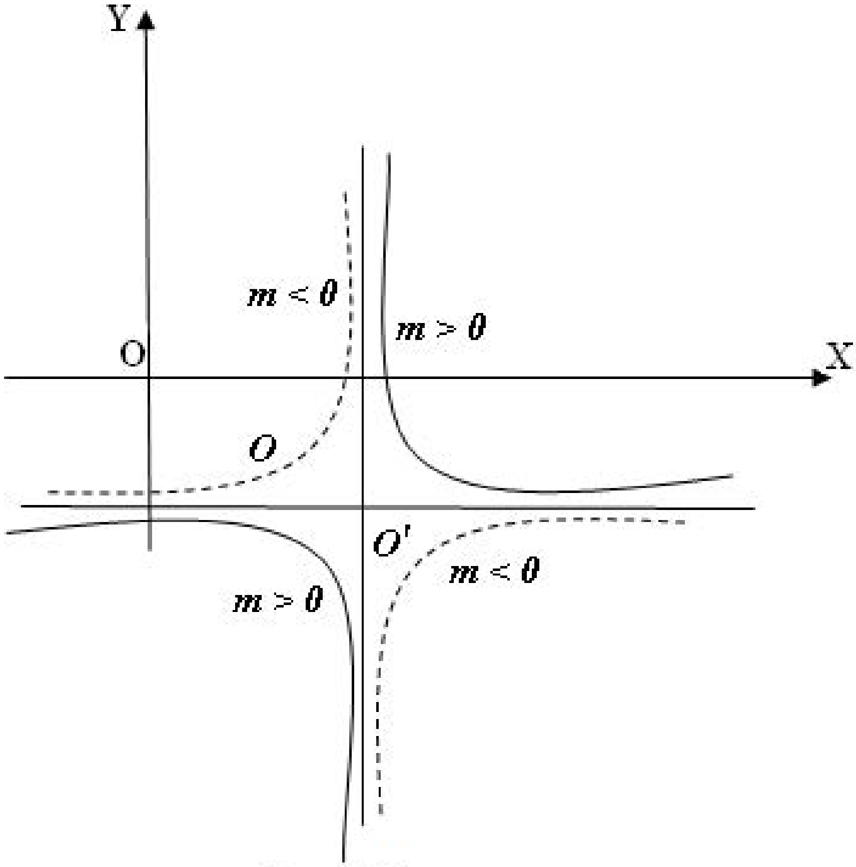


Рис. 3.12

Отсюда следует, что $F_1(-\sqrt{20};\ 0)$ и $F_2(\sqrt{20};\ 0)$.

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{20}}{4} \approx 1,12$$

Задача 6. Составить уравнение гиперболы, оси которой совпадают с осями координат, и проходящей через две точки $P(-5;\ 2)$ и $Q(2\sqrt{5};\ \sqrt{2})$. Найти фокусы и директрисы этой гиперболы.

Решение. Уравнение гиперболы ищем в виде $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Так как точки P и Q лежат на гиперболе, то их координаты удовлетворяют уравнению гиперболы.

Подставляя координаты данных точек в это уравнение, получим:

$$\frac{25}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1, \quad \frac{20}{a^2} - \frac{2}{b^2} = 1.$$

Решая полученную систему, найдем:

$$a^2 = 15, \quad b^2 = 6.$$

Таким образом,

$$\frac{x^2}{15} - \frac{y^2}{6} = 1$$

есть искомое уравнение.

Определим c по формуле $c = \sqrt{a^2+b^2}$. Имеем $c = \sqrt{15+6} = \sqrt{21}$. Фокусы данной гиперболы лежат на оси OX : $F_1(-\sqrt{21};\ 0)$ и $F_2(\sqrt{21};\ 0)$.

Директрисы определим по формуле:

$$x = \pm\frac{a}{e} = \pm\frac{a}{\frac{c}{a}} = \frac{a^2}{c}; \quad \text{т.е.} \quad x = \pm\frac{15}{\sqrt{21}} \approx \pm 3,26.$$

Задача 7. Найти координаты центра, вершин и уравнения асимптот гиперболы $y = \dfrac{3x-2}{x-1}$.

Решение. Преобразуем уравнение, выделив целую часть дробно-линейной функции:

$$y = \frac{3(x-1)+1}{x-1} = 3 + \frac{1}{x-1}$$

или $y - 3 = \dfrac{1}{x-1}$, откуда $(x-1)(y-3) = 1$.

Пологая $x - 1 = x'$, $y - 3 = y'$, получим $x'y' = 1$, т.е. заданное уравнение есть уравнение равносторонней гиперболы с центром $O'(1;\ 3)$ и асимптотами $x-1 = 0$, $y-3 = 0$ (Рис.3.10). Так как $m = 1 > 0$, то гипербола располагается в I и III квадратах, а новые координаты ее вершин $(\pm 1;\ \pm 1)$. Переходя к старым координатам по формулам $x = x' + 1$, $y = y' + 3$, найдем старые координаты вершин гиперболы $A(0;\ 2)$, $B(2;\ 4)$.

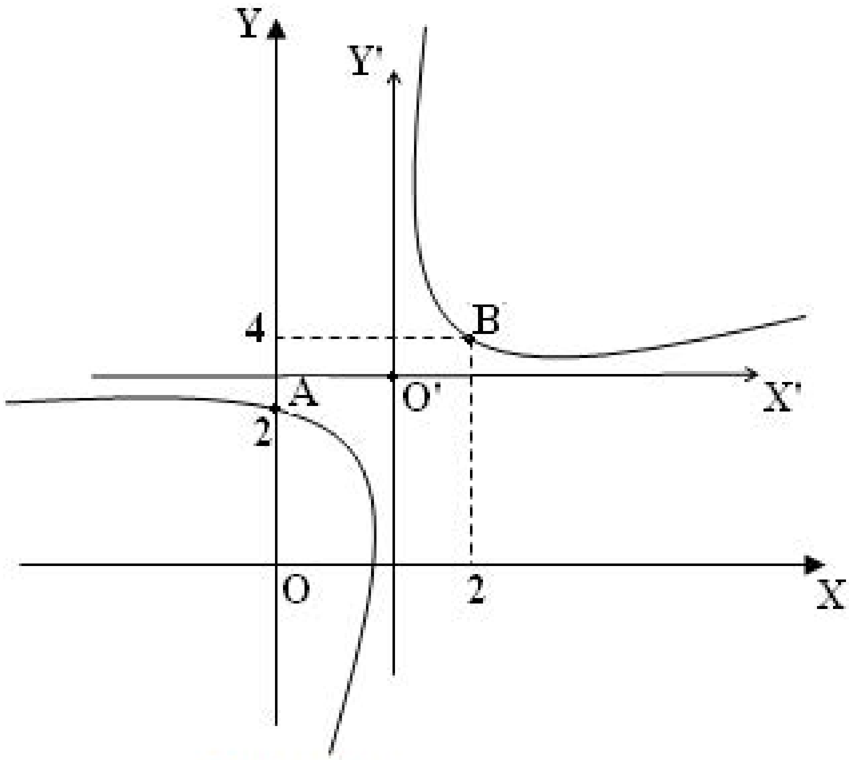


Рис. 3.13

§ 3.7. Парабола

Определение параболы. Ее каноническое уравнение.

Определение 3.5. Параболой называется геометрическое место точек, равноотстоящих от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой.

Если директриса параболы есть LS, а фокус - F, то парабола состоит из таких точек M, для которых $MK = MF$. (Рис.3.11).

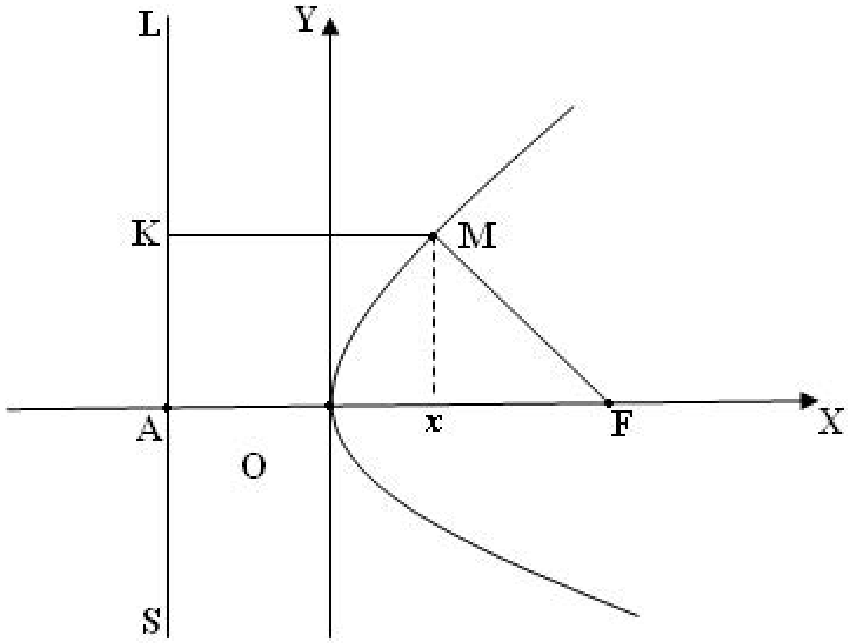


Рис. 3.14

Для вывода уравнения параболы, примем за ось OX прямую, проходящую через фокус F перпендикулярно к директрисе LS, и будем считать ее направленной от директрисы к фокусу. За начало координат возьмем середину O отрезка от точки F до данной прямой LS, длину которого обозначим через p, т.е. $LS = p$. Тогда координаты фокуса F будут $\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$, расстояние $AO = \frac{p}{2}$. Расстояние между точками $M(x;\ y)$ и $F\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$ равно

$$MF = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$

Координаты точки K - основания перпендикуляра, опущенного из точки M на директрису, будут $\left(-\frac{p}{2};\ y\right)$. Так как по определению $MK = MF$, то, применяя формулу расстояния между двумя точками, получим уравнение параболы в выбранной системе координат:

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}.$$

Возьмем в квадрат обе части данного уравнения:

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2,$$

или

$$x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px=\frac{p^2}{4},$$

откуда

$$y^2=2px \quad (p>0). \tag{3.38}$$

Уравнение (3.38) называется *простейшим* или *каноническим* уравнение параболы. Число p называется *параметром* параболы.

2. Исследование формы параболы. Исследуем форму параболы, используя только ее уравнение (3.38).

1. Точки пересечения с осями координат. В уравнение (3.38) полагая $x=0$, найдем $y=0$. Следовательно, парабола проходит через начало координат.

2. Симметрия. Так как уравнение (3.38) не изменяется от замены y на $-y$, то парабола симметрична относительно оси OX.

3. Область расположения. Так как $y^2\geq 0$ $p>0$, то из уравнения (3.38) следует, что $x\geq 0$. Следовательно, все точки параболы расположены от оси OY.

4. Форма параболы. Решив уравнение $y^2=2px$ относительно y и рассматривая параболу в первой координатной четверти, найдем $y=\pm\sqrt{2px}$. Откуда видно, что при возрастании x ордината y монотонно возрастает. Кривая имеет вид, данный на рис.3.41.

Парабола имеет одну ось симметрии. Ось симметрии параболы называют ее осью. Точка пересечения параболы с осью симметрии называется ее вершиной. Для параболы, заданной уравнением (3.38), вершиной является начало координат, а ось OY- касательной (в вершине).

5. Фокальный радиус. По определению параболы фокальный радиус r любой ее точки $M(x;\ y)$ равен расстоянию d этой точки от директрисы

LS, т.е. $r = d = KM = \left|x + \dfrac{p}{2}\right|$, но $x \geq 0,\ p > 0$, следовательно,

$$r = x + \frac{p}{2}. \tag{3.39}$$

Отношение расстояния r любой точки параболы от фокуса к расстоянию этой точки d до директрисы называется *эксцентриситетом* параболы, т.е.:

$$\frac{r}{d} = e, \tag{3.40}$$

где $e = 1$. Таким образом, эксцентриситет параболы равен 1.

Если координатная система выбрана, так, что ось абсцисс совмещена с осью параболы, начало координат - с вершиной, но парабола лежит в левой полуоплоскости (Рис.3.12), то ее уравнение будет иметь вид:

$$y^2 = -2px \tag{3.41}$$

Уравнение директрисы в этом случае $x = \dfrac{p}{2}$.

В случае, когда начало координат находится в вершине, а с осью совмещена ось ординат, парабола будет иметь уравнение

$$x^2 = 2py, \tag{3.42}$$

если она лежит в верхней полуплоскости (Рис. 3.13). Уравнение директрисы в этом случае $y = -\dfrac{p}{2}$,

$$x^2 = -2py, \tag{3.43}$$

если в нижней полуплоскости (Рис. 3.14).

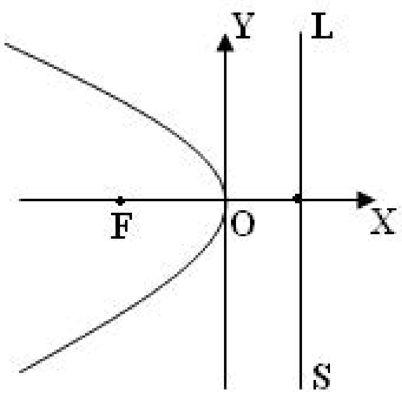


Рис. 3.15

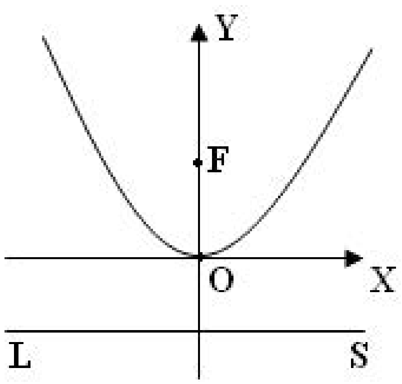


Рис. 3.16

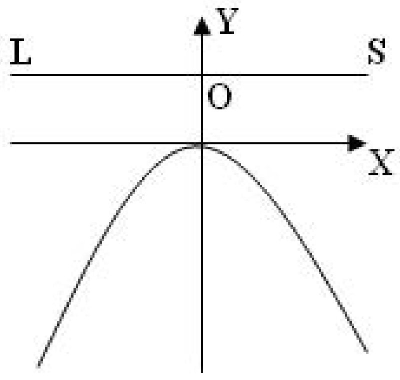


Рис. 3.17

Каждое из уравнений параболы (3.41), (3.42), (3.43), как и уравнение (3.38) называется *каноническим.*

Уравнение параболы с осью симметрии, параллельной одной из координатных осей, имеет вид:

$$(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0), \tag{3.44}$$

или

$$(x-x_0)^2 = 2p(y-y_0), \tag{3.45}$$

где $(x_0;\ y_0)$ - координаты вершины параболы.

Касательная к параболе $y^2 = 2px$ в точке $(x_1;\ y_1)$ определяется уравнением

$$yy_1 = p(x+x_1). \tag{3.46}$$

Рассмотрим квадратный трехчлен

$$y = ax^2 + bx + c \tag{3.47}$$

где $a \neq 0$. Перепишем это уравнение в виде $y = a\left(x^2 + \dfrac{b}{x}\,x\right) + c$, затем в виде:

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}\,x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a},$$

или, что то же самое

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right). \tag{3.48}$$

Обозначив $x+\dfrac{b}{2a} = X,\ y-\dfrac{4ac-b^2}{4a} = Y$, в новой системе координат $O'XY$ с центром $O'\left(-\dfrac{b}{2a},\ \dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$, уравнение (3.48) примет вид:

$$Y = aX^2. \tag{3.49}$$

Таким образом, график квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$ есть парабола с вершиной в точке $O'\left(-\dfrac{b}{2a},\ \dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$ и осью симметрии $x = -\dfrac{b}{2a}$, параллельной оси Oy.

Замечание 3.4 Форма параболы $y = ax^2$ полностью определяется значением коэффициента a. Поскольку же парабола $y = ax^2 + bx + c$ имеет ту же самую форму, то из трех коэффициентов $a,\ b,\ c$ на форму параболы (3.47) влияет только коэффициент a. Коэффициенты же b и c влияют лишь на положение вершины параболы.

Замечание 3.5. Аналогично устанавливается, что уравнению

$$x = ay^2 + by + c \quad (a \neq 0)$$

соответствует парабола, ось симметрии которой параллельна ось Ox.

Задача 9. Составить уравнение параболы, зная, что:

1) расстояние фокуса от вершины равно 3;

2) фокус имеет координаты $(5;\ 0)$, а ось ординат служит директрисой;

3) парабола симметрична относительно оси Ox, проходит через начало координат и через точку $M(2;\ -3)$.

Решение.

1) Фокус параболы находится в точке $F(3;\ 0)$, где $\dfrac{p}{2} = 3$, откуда $p = 6$ и уравнение директрисы будет $x = -3$. Следовательно, уравнение параболы имеет вид $y^2 = 2px = 2 \cdot 6x = 12x$.

2) Фокус параболы находится в точке $F(5;\ 0)$, а уравнением директрисы служит ось Oy. Поэтому $p = 5$ и вершина параболы находится в точке $A(2,5;\ 0)$. Следовательно, уравнение параболы имеет вид:

$$y^2 = 2p(x - x_0) = 2 \cdot 5 \cdot (x - 2,5) = 10x - 25.$$

3) Так как парабола симметрична оси Ox и проходит через точку M с положительной абсциссой, то она имеет вид, предустановленный на рис. 3.11. Подставляя координаты точки M в уравнение параболы $y^2 = 2px$, получим $9 = 2 \cdot p \cdot 2$ или $9 = 4p$, т.е. $p = \dfrac{9}{4} = 2,25$.

Следовательно, искомое уравнение параболы $y^2 = 2 \cdot 2,25x = 4,5x$, фокус этой параболы $F(1,125;\ 0)$, уравнение директрисы $x = -1,125$.

Задача 10. Найти точки пересечения парабол $y = x^2$ и $x = y^2$.

Решение. Составляя систему уравнений $y^2 = x^4$ или $x = x^4$, находим точки парабол, т.е. $x - x^4 = a$, или $x(1 - x^3) = 0$. Откуда $x_1 = 0$ и $1 - x^3 = 0$. Решая уравнение $(1 - x)(1 + x + x^2) = 0$, находим $x_2 = 1$. Уравнение $1 + x + x^2 = 0$ в области действительных чисел не имеет корни. Поэтому точки пересечения исходных парабол находятся в точках $O(0;\ 0)$ и $M(1;\ 1)$ (Рис. 3.15).

Задача 11. Упростить уравнение параболы $y = 2x^2 + 8x + 11$, найти координаты ее вершины и определить ее расположение на плоскости.

Решение. Выделим в правой части уравнения $y = 2x^2 + 8x + 11$ полный

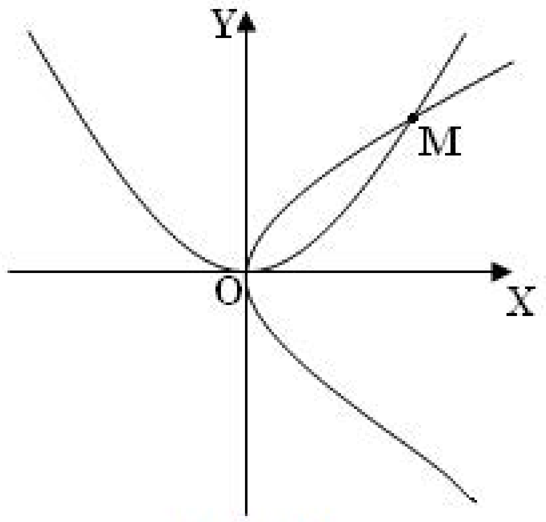


Рис. 3.18

квадрат, получим:

$$y = 2(x^2+4x)+11 = 2(x^2+4x+4-4)+11 = 2[(x+2)^2-4]+11 = 2(x+2)^2+3,$$

или

$$y - 3 = 2(x+2)^2.$$

Положим $y-3=Y$, $x+2=X$. Отсюда координаты нового начала, т.е. вершины параболы, будут $x_1=-2$, $y_1=3$. После переноса начала координат в точку $O_1(-2;\ 3)$ уравнение параболы примет наиболее простой вид $Y = 2X^2$ (Рис. 3.16).

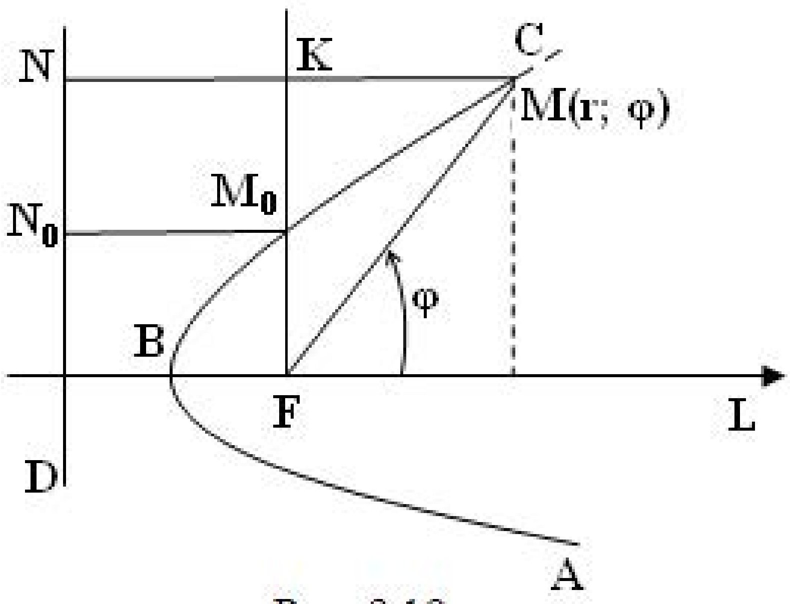


Рис. 3.19

§ 3.8. Уравнение кривых 2-го порядка в полярных координатах

В данном параграфе выведем уравнение кривых 2-го порядка в полярных координатах, принимая за полюс один из фокусов и за полярную ось - фокальную ось этого конического сечения.

Пусть ABC (Рис. 3.17) - дуга конического сечения (эллипса, гиперболы или параболы), B - вершина, F - фокус, DN - соответствующая директриса. Примем точку F за полюс, прямую BFL за полярную ось, выбрав на ней направление от фокуса F в сторону, противоположную директрисе. Пусть M_0 точка дуги BC конического сечения, лежащая на перпендикуляре к полярной оси, проходящем через полюс F. Называемой фокальным параметром $p = = FM_0$.

Пусть $M(r;\ \varphi)$ - произвольная точка кривой. Найдем зависимость между полярными координатами $r;\ \varphi$ и данными числами p и e, где e - эксцентриситет. По общему свойству всех точек конического сечения, имеем:

$$\frac{FM}{MN} = e. \tag{3.50}$$

При любом расположении точки M на коническом сечении

$$FM = r, \quad MN = N_0M_0 + r\cos\varphi,$$

Так как $\dfrac{FM_0}{N_0M_0} = e,\ FM_0 = p$, то $N_0M_0 = \dfrac{p}{e}$. Следовательно,

$$MN = \frac{p}{e} + r\cos\varphi. \tag{3.51}$$

Тогда равенства (3.50) с учетом (3.51) можно переписать в виде:

$$\frac{r}{\dfrac{p}{e} + r\cos\varphi} = e,$$

откуда

$$r = \frac{p}{1 - e\cdot\cos\varphi}, \tag{3.52}$$

где p - фокальный параметр кривой.

Уравнение (3.52) будет определять эллипс, если $e < 1$, гиперболу - при $e > 1$, параболу, когда $e = 1$. При $e = 0$ уравнение (3.52) представляет уравнение окружности с центром в точке O. (Рис. 3.17 a).

В уравнении (3.52) величина p для параболы имеет, очевидно, прежнее значение, т.е. то же, что и в уравнении $y^2 = 2px$. В самом деле, парабола $p = FM_0 = M_0N_0$, т.е. p есть расстояние от фокуса до директрисы. Выразим

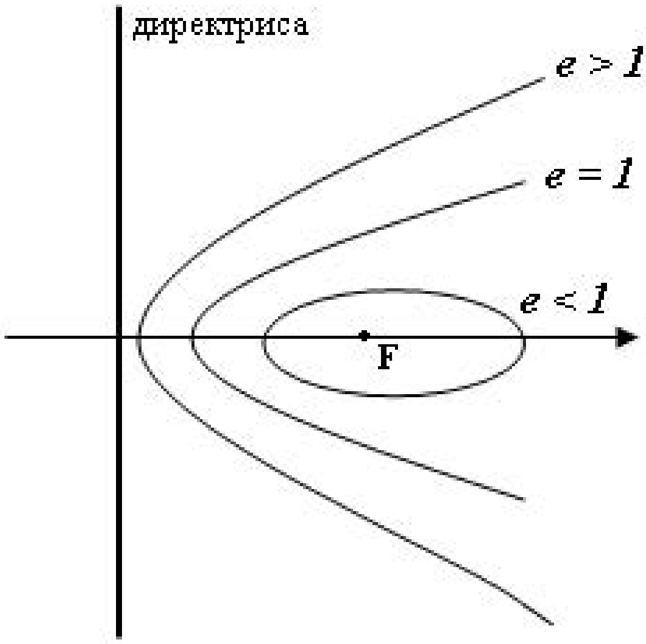


Рис. 3.20

p для эллипса и гиперболы. Подставляя координаты точки $M_0(-c;\ p)$ эллипса в уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

получаем

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} = 1,$$

откуда

$$\frac{p^2}{b^2} = \frac{a^2 - c^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}, \quad p^2 = \frac{b^4}{a^2}, \quad p = \frac{b^2}{a}.$$

Аналогично, подставляя координаты точки гиперболы $M_0(c;\ p)$ в ее уравнении, находим $p = \dfrac{b^2}{a}$.

Таким образом, уравнения эллипса, гиперболы и параболы в полярных координатах имеют одинаковый вид (3.52), где $p = \dfrac{b^2}{a}$ для эллипса и гиперболы.

Задача 12. Дано уравнение эллипса $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{25} = 1$. Составить его полярное уравнение, если направление полярной оси совпадает с положительным направлением оси абсцисс, а полюс находится в левом фокусе эллипса.

Решение. Используя полярное уравнение эллипса

$$r = \frac{p}{1 - e \cdot \cos\varphi}, \quad \text{где} \quad p = \frac{b^2}{a} = \frac{25}{6}, \quad e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{36 - 25}}{6} = \frac{\sqrt{11}}{6},$$

находим:

$$r = \frac{\dfrac{25}{6}}{1 - \dfrac{\sqrt{11}}{6} \cdot \cos\varphi} = \frac{25}{6 - \sqrt{11} \cdot \cos\varphi}.$$

Задача 13. Написать каноническое уравнение кривой второго порядка

$$r = \frac{1}{2 - \sqrt{5}\cos\varphi}.$$

Решение. Согласно условию задачи

$$r = \frac{1}{2 - \sqrt{5}\cos\varphi} = \frac{\dfrac{1}{2}}{1 - \dfrac{\sqrt{5}}{2}\cos\varphi},$$

откуда $e = \dfrac{\sqrt{5}}{2} > 1$.

Следовательно, данное уравнение есть уравнение гиперболы (Рис. 3.5).

Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} p = \dfrac{b^2}{a} = \dfrac{1}{2}, \\ e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}, \\ a^2 = a^2 + b^2 \end{cases}$$

Решив эту систему:

$$b^2 = \frac{a}{2}, \quad c = \frac{a\sqrt{5}}{2}, \quad 5a^2 = 4a^2 + 2a, \quad a^2 = 2a,$$

получим: $a = 2,\ b^2 = 1,\ b = 1$.

Каноническим уравнением гиперболы будет

$$\frac{x^2}{4} - y^2 = 1.$$

§ 3.9. Преобразование общего уравнения второй степени

В § 3.1 была доказана следующая **Теорема 3.3.** *Если уравнению*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{3.53}$$

соответствует кривая, то это или эллипс, или гипербола, или парабола.

Эта теорема была рассмотрена при случае, когда $B = 0$, т.е. когда в уравнение (3.53) не входит произведение xy.

Будем теперь считать, что $B \neq 0$. Если мы повернем систему координат на любой угол φ, то уравнение (3.53) преобразуется к виду, не содержащему члена с произведением xy.

Повернем, координатные оси на некоторый угол, который выберем впоследствии.

Как известно, формулы преобразования координат имеют вид:

$$x = X\cos\varphi - Y\sin\varphi,$$

$$y = X\sin\varphi + Y\cos\varphi.$$

Заменяя x и y в уравнении (3.53) этими выражениями получим:

$$A(X\cos\varphi - Y\sin\varphi)^2 + B(X\cos\varphi - Y\sin\varphi)\cdot(X\sin\varphi + Y\cos\varphi) +$$

$$+ C(X\sin\varphi + Y\cos\varphi)^2 + D(X\cos\varphi - Y\sin\varphi) + E(X\sin\varphi + Y\cos\varphi) + F = 0.$$

Раскрыв в данном уравнении x и y их выражениями по формулам преобразования, получим:

$$\begin{aligned}
&A_1 = A\cos^2\varphi + B\sin\varphi\cdot\cos\varphi + C\sin^2\varphi,\\
&B_1 = 2(C - A)\sin\varphi\cdot\cos\varphi + B(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi),\\
&C_1 = A\sin^2\varphi - B\sin\varphi\cdot\cos\varphi + C\cos^2\varphi,\\
&D_1 = D\cos\varphi + E\sin\varphi,\\
&E_1 = -D\sin\varphi + E\cos\varphi.
\end{aligned}$$

Выберем угол φ так, чтобы коэффициент B_1 обратился в нуль, т.е. чтобы

$$2(C - A)\sin\varphi\cdot\cos\varphi + B(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = 0. \tag{3.54}$$

Так как

$$2\sin\varphi\cdot\cos\varphi = \sin 2\varphi, \quad \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \cos 2\varphi,$$

то уравнение (3.54) можно записать в виде:

$$B\cos 2\varphi + (C - A)\sin 2\varphi = 0.$$

или

$$(A - C)\sin 2\varphi = B\cos 2\varphi. \tag{3.55}$$

Заметим, что $\sin 2\varphi \neq 0$, так как в противном случае, как видно из уравнение (3.55), равнялось бы нулю и B, что противоречит условию. Поэтому уравнение (3.55) можно разделить на $\sin 2\varphi$, после чего получим:

$$\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{A - C}{B}$$

или

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{B}{A - C}. \tag{3.56}$$

Так как любое вещественное число служит тангенсом какого-нибудь угла, то всегда при любых A, B, C существует угол φ, удовлетворяющий соотношению (3.56). Но это и значит, что при помощи надлежащего поворота координатной системы уравнение (3.53) всегда можно превратить в уравнение, не содержащее произведение координат. В результате преобразованное уравнение примет вид:

$$A_1X^2 + C_1Y^2 + D_1X + E_1Y + F = 0, \tag{3.57}$$

где все коэффициенты известны.

Замечание 3.6. Если $A = C$, то равенство (3.56) теряет смысл. В этом случае надо обратиться к равенству (3.55), которое примет вид:

$$B \cos 2\varphi = 0,$$

т.е. $\cos 2\varphi = 0$ $(B \neq 0)$. Но тогда $2\varphi = 90^0$ или $\varphi = 45^0$. Итак, при $A = C$ систему координат надо поворачивать на 45^0. Итак, при $A = C$ систему координат надо поворачивать на 45^0.

Задача 14. Привести к каноническому виду уравнение

$$14x^2 + 24xy + 21y^2 - 4x + 18y - 189 = 0 \tag{3.58}$$

Решение. Преобразуем уравнение с помощью поворота осей

$$x = X\cos\varphi - Y\sin\varphi, \quad y = X\sin\varphi + Y\cos\varphi.$$

Тем самим повернем оси координат на угол φ, найдя $\operatorname{tg} 2\varphi$ по формуле (3.56). В данном в случае $A = 14$, $B = 24$, $C = 21$. Следовательно, $\operatorname{tg} 2\varphi = \dfrac{B}{A - C} = -\dfrac{24}{7}$. Но

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1 - \operatorname{tg}^2\varphi}.$$

Значит $\operatorname{tg}\varphi$ удовлетворяет квадратному уравнению $\dfrac{2\operatorname{tg}\varphi}{1 - \operatorname{tg}^2\varphi} = -\dfrac{24}{7}$, или

$$12\operatorname{tg}^2\varphi - 7\operatorname{tg}\varphi - 12 = 0.$$

Решения этого уравнения: $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{4}{3}$ и $\operatorname{tg}\varphi = -\dfrac{3}{4}$. Ограничиваясь острым углом φ, берем первое из них. Тогда

$$\sin\varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{4}{5}; \quad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{3}{5}.$$

и формулы преобразования координат при повороте системы на этот угол φ, т.е. $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{4}{3}$, будут иметь вид:

$$x = \frac{3X-4Y}{5}, \quad y = \frac{4X+3Y}{5}.$$

Подставляя эти значения x и y в уравнение (3.58)

$$14\left(\frac{3X-4Y}{5}\right)^2 + 24\frac{3X-4Y}{5}\cdot\frac{4X+3Y}{5} + 21\left(\frac{4X+3Y}{5}\right)^2 -$$

$$-4\cdot\frac{3X-4Y}{5} + 18\cdot\frac{4X+3Y}{5} - 189 = 0.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получим:

$$30X^2 + 5Y^2 + 12X + 14Y - 37,8 = 0,$$

или

$$30\left(X^2 + \frac{6}{15}X\right) + 5\left(Y^2 + \frac{14}{5}Y\right) - 37,8 = 0.$$

Выражение в скобках дополним до полного квадрата:

$$30\left(X + \frac{1}{5}\right)^2 + 5\left(Y + \frac{7}{5}\right) = 46,$$

или

$$\frac{\left(X + \frac{1}{5}\right)}{1,5} + \frac{\left(Y + \frac{7}{5}\right)^2}{9,2} = 1.$$

таким образом, исходное уравнение представляет эллипс с полуосями $a = \sqrt{1,5}$ и $b = \sqrt{9,2}$ (Рис.3.18). Приняв за новое начало точку $O_1\left(-\dfrac{1}{5};\ -\dfrac{7}{5}\right)$, применим формулы преобразования координат $X' = X + \dfrac{1}{5}$, $Y' = Y + \dfrac{7}{5}$, получим:

$$\frac{X'}{1,5} + \frac{Y'}{9,2} = 1.$$

В полученном уравнении эллипса большая ось направлена по оси OY' а малая - по оси OX'.

Для построения этого эллипса нанесем на чертеж повернутые оси OX' и OY'. Для этого на оси Ox отложим *3* единицы масштаба, а на оси Oy - *4* единицы. Получится точка $M(3;\ 4)$, радиус которой OM наклонен к оси Ox под углом, φ, для которого $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{4}{3}$. Следовательно, через эту точку M и пройдет новая ось абсцисс. Затем отмечаем на оси $OX'\,OY'$ вершины эллипса и чертим сам эллипс (Рис. 3.18).

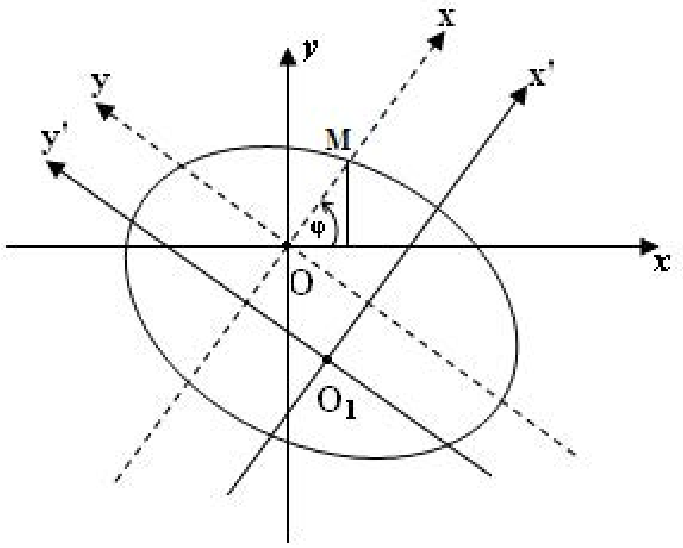


Рис. 3.21

Заметим, что данный эллипс пересекает старые координатные оси x и y в точках, которые находятся из квадратных уравнений (если в исходном уравнении положить $y = 0$ и $x = 0$).

$$14x^2 - 4x - 189 = 0 \quad \text{и} \quad 21y^2 + 18y - 189 = 0.$$

Откуда $x_1 \approx 3,8;\ x_2 \approx -3,5$ и $y_1 \approx 2,6;\ y_2 \approx -3,4$.

§ 3.10. Примеры решения задач

Задача 15. Показать, что прямая $y = x\sqrt{3}$ касается окружности $(x-$ $-2)^2 + y^2 = 3$. Найти точку касания.

Решение. Так как по условию задачи прямая $y = x\sqrt{3}$ касается окружности, то данная касательная имеет с ней только одну общую точку. Поэтому совместное решение уравнений прямой и окружности должно дать только один ответ.

Значение y из уравнения прямой подставляем в уравнение окружности:

$$(x-2)^2+3x^2=3, \quad \text{или} \quad 4x^2-4x+1=0.$$

Квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет только одно решение только тогда, когда его дискриминант b^2-4ac равен нулю. Для данного уравнения

$$D=16-16=0, \quad \text{откуда} \quad x=\frac{4\pm 0}{8}=\frac{1}{2}.$$

Подставляя данное значение $x=\dfrac{1}{2}$ в уравнение прямой, находим $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Искомая точка пересечения прямой и окружности, $M\left(\dfrac{1}{2};\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Задача 16. Найти уравнение окружности, касающейся оси Oy в начале координат и пересекающей ось Ox в точке $(-12;\ 0)$.

Решение. Известно, что диаметр окружности, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной. Это значит, что диаметр OA окружности направлен по оси Ox, центр окружности находится в точке $C(-6;\ 0)$, а радиус окружности $r=5$ (Рис.3.19).

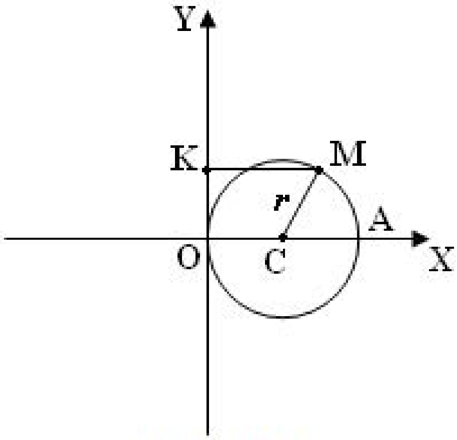


Рис. 3.22

Искомое уравнение имеет вид:

$$(x+6)^2+y^2=36, \quad \text{или} \quad x^2+y^2+2x=0.$$

Задача 17. Найти центр и радиус окружности, проходящей через точки $A(-1;\ 3)$, $B(0;\ 2)$ и $C(1;\ -1)$. Написать ее уравнение.

Решение. Так как точки $A,\ B,\ C$ лежат на окружности, то их координаты удовлетворяют уравнению $x^2+y^2+mx+ny+p=0$:

$$\left.\begin{array}{c} 1+9-m+3n+p=0, \\ 4+2n+p=0, \\ 1+1+m-n+p=0 \end{array}\right\} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 10-m+3n+p=0, \\ 4+2n+p=0, \\ 2+m-n+p=0. \end{cases}$$

Из полученной системы определяем величины $m,\ n, p$. Вычитая из 1-го уравнения второе, а затем третье, получаем:

$$\begin{cases} 6 - m + n = 0, \\ 8 - 2m + 4n = 0. \end{cases}$$

Откуда находим, что $m = 8,\ n = 2$ и $p = -8$.

Таким образом, искомая окружность имеет уравнение

$$x^2 + y^2 + 8x + 2y - 8 = 0,$$

или

$$(x + 4)^2 + (y + 1)^2 = 25,$$

ее центр $O(-4;\ -1)$, а радиус $R = 5$.

Второй способ решения задачи. Как известно, центр окружности, описанной вокруг треугольника, лежит на пересечении перпендикуляров к серединам сторон. Поэтому для нахождения центра искомой окружности можно поступить следующим образом: 1) найдем уравнения двух сторон треугольника (например AB и AC) по координатам вершин, - т.е. по формуле

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Для стороны AB имеем:

$$\frac{x + 1}{0 + 1} = \frac{y - 3}{2 - 3} \quad \text{или} \quad \frac{x + 1}{1} = \frac{y - 3}{-1},$$

откуда $x + y - 2 = 0$, где $K_{AB} = -1$;

Аналогично, для стороны AC имеем:

$$\frac{x + 1}{1 + 1} = \frac{y - 3}{-1 - 3}, \quad \text{или} \quad \frac{x + 1}{2} = \frac{y - 3}{-4},$$

откуда $2x + y - 1 = 0$, и $K_{AC} = -2$. 2) найдем середины этих сторон. Пусть точки P и Q являются серединами сторон AB и BC соответственно. Тогда согласно формулам

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

имеем:

$$x_P = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-1 + 0}{2} = -\frac{1}{2},$$

$$y_P = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3 + 2}{2} = \frac{5}{2};$$

Координаты точки $P\left(-\dfrac{1}{2};\ \dfrac{5}{2}\right)$.

Аналогично, для точки Q находим ее координаты, т.е. $Q(0;\ 1)$. 3) через точки P и Q проведем прямые PS и QL перпендикулярные соответствующим сторонам. Согласно формуле

$$y - y_0 = K(x - x_0)$$

имеем: для стороны AB $K_{AB} = -1$, тогда согласно условию перпендикулярности $K_{PS} = -\dfrac{1}{K_{AB}} = 1$. Откуда $y - \dfrac{5}{2} = 1.\ \left(x + \dfrac{1}{2}\right)$. или $x - y + 3 = 0$ (PS).

Аналогично, составляем уравнение QL :

$$y - 1 = \frac{1}{2}\ (x - 0), \quad K_{QL} = -\frac{1}{K_{AC}} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2},$$

или

$$x - 2y + 2 = 0 \quad (QL).$$

4) найдем точку пересечения перпендикуляров PS и QL:

$$\begin{cases} x - y + 3 = 0, \\ x - 2y + 2 = 0. \end{cases}$$

Откуда $x = -4,\ y = -1$, т.е. $O(-4;\ -1)$. Точка $O(-4; -1)$ и является центром окружности. 5) радиус окружности находим по формуле расстояния между двумя точками (от центра до одной из вершин треугольника), т.е.:

$$OA = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-1 + 4)^2 + (3 + 1)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

Таким образом, уравнение окружности с центром в точке $O(-4;\ -1)$ и радиусом $R = 5$ имеет вид:

$$(x + 4)^2 + (y + 1)^2 = 25.$$

Задача 17. Составить уравнение окружности, касающейся двух параллельных прямых $2x + y - 5 = 0$ и $2x + y + 15 = 0$, причем одной из них - в точке $A(2;\ 1)$.

Решение. Составить уравнение перпендикуляра AB к данным прямым (рис.3.20).

Уравнение прямой AB, перпендикулярной к данным, имеет вид:

$$y - 1 = K(x - 2),$$

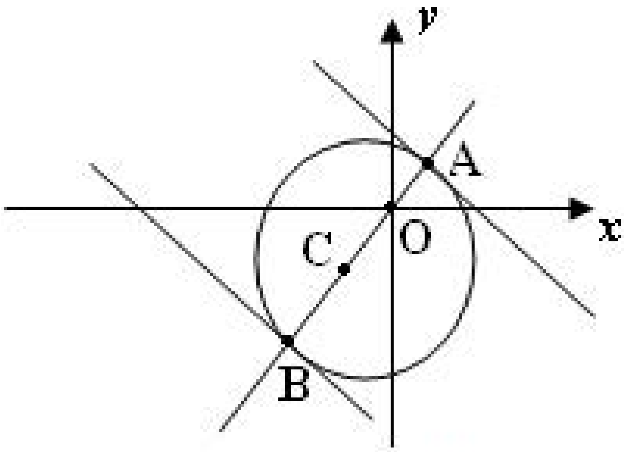


Рис. 3.23

где угловой коэффициент находится из условии перпендикулярности $K_2 = -\dfrac{1}{K_1} = -\dfrac{1}{-2} = \dfrac{1}{2}$. Тогда имеем:

$$y - 1 = \frac{1}{2}\,(x - 2), \quad \text{или} \quad 2y - 2 = x - 2,$$

откуда $y = \dfrac{1}{2}\,x$. Это и есть уравнение прямой AB. Составляя систему уравнений

$$\left.\begin{array}{c} 2x + y + 15 = 0, \\ y = \dfrac{1}{2}\,x \end{array}\right\}$$

находим координаты точки B, где $x = -6;\ y = -3$; т.е. $B(-6;\ -3)$. Координаты точки центра $C(x_0;\ y_0)$ находим из условий:

$$x_c = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2 - 6}{2} = -2;$$

$$y_c = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1 - 3}{2} = -1.$$

Откуда координаты центра $C(-2;\ -1)$.

Так как радиус $AC = \dfrac{1}{2}\ AB$, то согласно формуле расстояний между двумя точками, имеем:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(2 + 6)^2 + (1 + 3)^2} = \sqrt{80}.$$

Откуда $r = AC = \dfrac{1}{2}\ AB = \dfrac{1}{2}\sqrt{80} = \sqrt{20}$.

Таким образом, уравнение окружности имеет вид:

$$(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 20.$$

Задача 18. Составить уравнение окружности, если ее центр находится в точке $C(5;\ 4)$ и окружность отсекает от прямой $x + 2y - 3 = 0$ хорду, длина которой равна 8.

Решение. Искомое уравнение имеет вид:

$$(x-5)^2+(y-4)^2=r^2.$$

Определим расстояние центра C от данной прямой

$$CD=\frac{1\cdot5+2\cdot4-3}{\sqrt{1+4}}=\frac{10}{\sqrt5}=2\sqrt5.$$

Так как радиус, перпендикулярный к хорде, делит ее пополам, то половина хорды будет равна 4 единицам. По теореме Пифагора имеем:

$$r^2=4^2+CD^2=16+20=36,\quad r^2=36,\quad r=6.$$

Уравнение окружности: $(x-5)^2+(y-4)^2=36$.

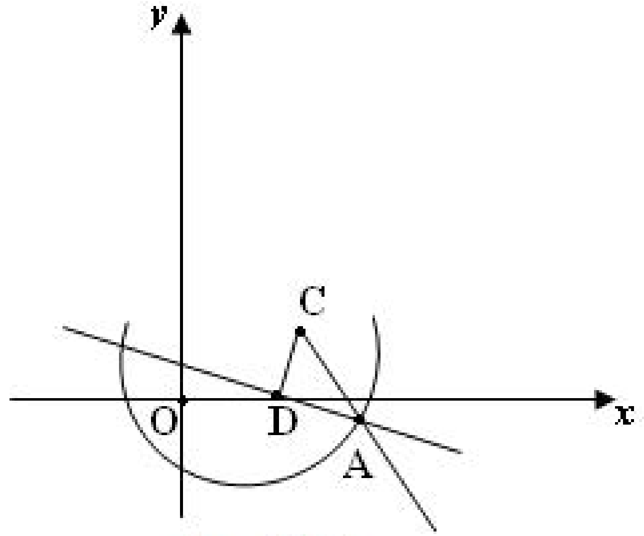


Рис. 3.24

Задача 19. Определим длины осей, координаты фокусов, эксцентриситет и директрисы эллипса

$$9x^2+25y^2=225.$$

Решение. Преобразуем это уравнение к простейшему виду $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Разделив обе части заданного уравнения на 225. получим $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

Отсюда заключаем, что $a^2=25$; $b^2=9$. Значит $a=5$; $2a=10$; $b==3$; $2b=6$. Таким образом, длины осей равны соответственно 10 и 6. Зная a и b, из соотношения $a^2-c^2=b^2$ найдем c. Подставим $a=10$; $b=6$ и получим, что $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{25+9}=\sqrt{34}$. Координаты фокусов будут $(-\sqrt{34};\ 0)$ и $(\sqrt{34};\ 0)$. Эксцентриситет эллипса

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{34}}{5}.$$

Уравнения директрис в общем виде:

$$x = \pm\frac{a}{e} = \pm\frac{a^2}{c}.$$

Откуда получим:

$$x = \pm\frac{25}{\sqrt{34}} = \pm\frac{25\sqrt{34}}{34} \approx \pm 4,3.$$

Задача 20. Определить эксцентриситет эллипса, если расстояние между фокусами равно расстоянию между вершинами большей и малой осей.

Решение. Согласно условию задачи $2c = AB$. Исходя из этого прямого треугольника по теореме Пифагора, имеем:

$$AB^2 = OB^2 + OA^2,$$

где $OB = b$ и $OA = a$ полуосей эллипса (Рис. 3.52), т.е. $a^2 + b^2 = (2c)^2$. С другой стороны по определению эллипса, имеем: $a^2 - c^2 = b^2$ или $c^2 = a^2 - b^2$. Составляя систему уравнений

$$\begin{cases} c^2 = a^2 - b^2, \\ 4c^2 = a^2 + b^2 \end{cases}$$

и решая ее, находим: $b^2 = \frac{3}{5}\,a^2$. Откуда $c^2 = a^2 - b^2 = a^2 - \frac{3}{5}\,a^2 = \frac{2}{5}\,a^2$, или $c = \pm a\sqrt{\frac{2}{5}} = \pm a\sqrt{0,4}$. Для эксцентриситета эллипса, имеем:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{a\sqrt{0,4}}{a} = \sqrt{0,4}; \quad e = \sqrt{0,4}.$$

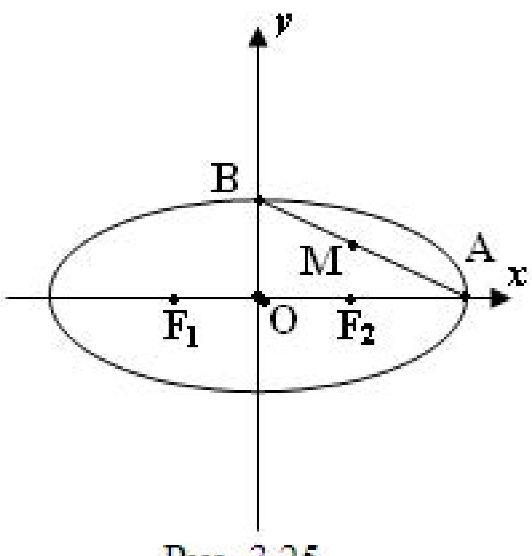


Рис. 3.25

Задача 21. Отрезок постоянной длины скользит своими концами по сторонам прямого угла. Определить кривую, описываемую любой точкой M, лежащей на этом отрезке.

Решение. Стороны прямого угла примем за оси прямоугольной системы координат (Рис. 3.52). Пусть отрезок AB делится точкой M в отношении $\dfrac{BM}{MA} = \lambda$. Если мы обозначим через m и n отрезки, отсекаемые отрезком AB соответственно на координатных осях Ox и Oy, т.е. $OA = m$ и $OB = n$, то во все время движения будет сохраняться равенство

$$m^2 + n^2 = AB^2. \quad (AB = p).$$

Координаты точек B и A соответственно будут $B(0;\ n)$, $A(m;\ n)$. Координаты точки M обозначим через x и y. Тогда согласно формулам:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},$$

получаем:

$$x = \frac{0 + \lambda m}{1+\lambda} = \frac{\lambda m}{1+\lambda}; \quad y = \frac{n + \lambda \cdot 0}{1+\lambda} = \frac{n}{1+\lambda};$$
$$\frac{x}{\lambda} = \frac{m}{1+\lambda}; \quad y = \frac{n}{1+\lambda}.$$

Возведя обе части каждого из этих равенств в квадрат, почленно их сложим. Тогда получим:

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + y^2 = \frac{m^2 + n^2}{(1+\lambda)^2}.$$

Учитывая, что $m^2 + n^2 = p^2$, имеем:

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + y^2 = \frac{p^2}{(1+\lambda)^2}.$$

Теперь деля обе части этого уравнения на его правую часть, исходное уравнение можно записать в виде:

$$\frac{x^2}{\dfrac{\lambda^2 p^2}{(1+\lambda)^2}} + \frac{y^2}{\dfrac{p^2}{(1+\lambda)^2}} = 1.$$

Искомым геометрическим местом является эллипс с полуосями

$$a = \frac{\lambda p}{1+\lambda}, \quad b = \frac{p}{1+\lambda}.$$

Задача 22. Упростить уравнение кривой

$$\frac{(x+5)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$$

и определить ее параметры.

Решение. Вводя координаты по формулам $X = x+5,\ Y = y+2$, получаем уравнение эллипса

$$\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{4} = 1$$

с полуосями $a = 3,\ b = 2$.

Из формул преобразования $X = x + 5, Y = y + 2$ находим координаты центра эллипса: $x = -5;\ y = -2$ (Рис. 3.53). $O_1(-5;\ -2)$ - точка центра.

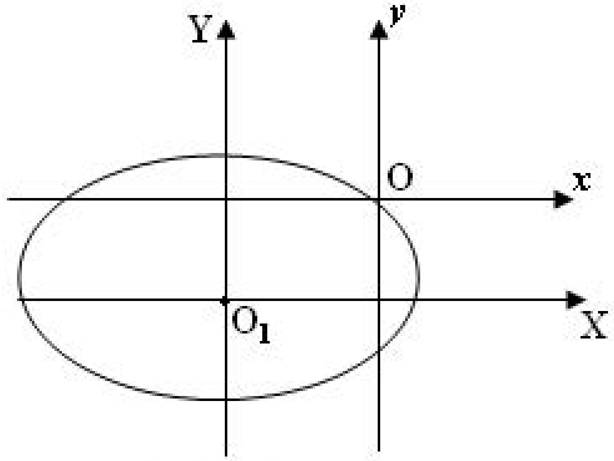


Рис. 3.26

Задача 23. Определить вид кривой и ее расположение на плоскости по уравнению

$$9x^2 + 4y^2 - 18x - 8y - 23 = 0$$

Решение. Выделяя полные квадраты, преобразуем левую часть уравнения:

$$9(x^2 - 2x) + 4(y^2 - 2y) - 23 = 0,$$

$$9(x^2 - 2x + 1) - 9 + 4(y^2 - 2y + 1) - 4 - 23 = 0,$$

$$9(x-1)^2 + 4(y-1)^2 - 36 = 0,$$

или

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1.$$

Вводя новые координаты по формулам $X = x - 1,\ Y = y - 1$, запишем уравнение в виде:

$$\frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{9} = 1.$$

Это уравнение эллипса с полуосями $a = 2,\ b = 3$ и с центром в точке $O_1(1;\ 1)$.

Задача 24. Найти длину диаметра эллипса $\dfrac{x^2}{12} + \dfrac{y^2}{6} = 1$, направленного по биссектрисе второго координатного угла.

Решение. Диаметром эллипса называется хорда, проходящая через центр - точку пересечения его осей. Уравнением этого диаметра является прямая $y = -x$. Пусть точки M и N - точки пересечения эллипса с прямой $y = -x$ (Рис.3.24). Чтобы найти координаты точки M и N, в которых выбранная хорда пересекает эллипс, надо решить совместно уравнения эллипса и прямой, т.е.

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{12} + \dfrac{y^2}{6} = 1, \\ y = -x. \end{cases}$$

Представляя значение $y = -x$ в первое уравнение, находим:

$$\frac{x^2}{12} + \frac{(-x^2)}{6} = 1 \quad \text{или} \quad 3x^2 = 12.$$

Откуда $x_{1,2} = \pm 2$ и $y_{1,2} = \pm 2$. Таким образом, координаты точки $M(-2;\ 2)$ и $N(2;\ -2)$. По формуле расстояния между двумя точками, получим:

$$|MN| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}.$$

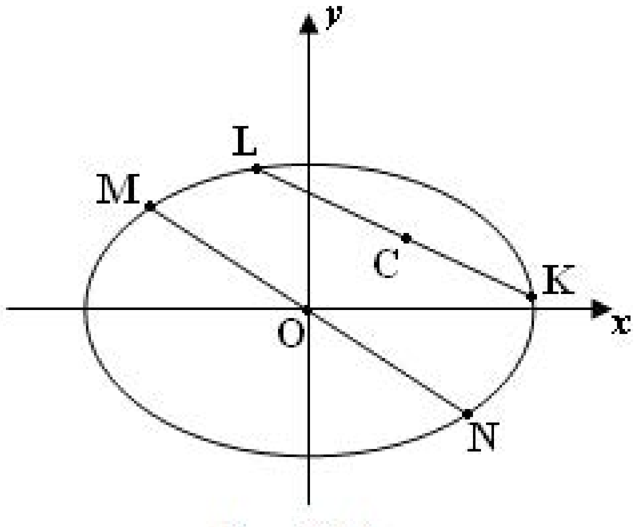


Рис. 3.27

Задача 25. Дан эллипс $x^2 + 2y^2 = 8$. Через точку $C(1;\ 1)$ провести хорду, делящуюся в этой точке попалам.

Решение. Пусть прямая LK (Рис. 3.24) является искомой хордой, которая проходит через точку C. Уравнение данной прямой будет $y - 1 = k(x - 1)$. Коэффициент k определяется из условия, что точка $C(1;\ 1)$ является серединой отрезка LK, где L и K - точки пересечения этой прямой с эллипсом. Чтобы найти точки L и K, надо решать совместно уравнения эллипса и данной прямой, т.е.

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 8, \\ y - 1 = k(x - 1). \end{cases}$$

Подставляя значение y из второго уравнения в первое, находим:

$$x^2 + 2[1 + k(x - 1)]^2 = 8. \tag{A}$$

Абсциссы x_L и x_K точек L и K суть корни этого квадратного уравнения. Нас интересует середина точки $C(x_C;\ y_C)$ хорды LK. Согласно известной формуле

$$x_C = \frac{x_L + x_K}{2}.$$

Таким образом, нам нужны не взятые по отдельности корни уравнения (A), а сумма этих корней. Но ведь сумма корней квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0$$

равна $-\dfrac{b}{a}$. Переписав уравнение (A) в форме:

$$x^2 - \frac{4(k^2 - k)}{1 + 2k^2}\, x + \frac{2 - 4k + 2k^2}{1 + 2k^2} = 0,$$

видим, что

$$x_L + x_K = \frac{4(k^2 - k)}{1 + 2k^2},$$

откуда

$$x_C = \frac{2(k^2 - k)}{1 + 2k^2} = 1.$$

Упрощая данное равенство, находим:

$$2(k^2 - k) = 1 + 2k^2, \quad \text{или} \quad k = -\frac{1}{2}.$$

Подставляя найденное значение k в уравнение прямой, получим:

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1),$$

или

$$x + 2y - 3 = 0.$$

Задача 26. На гиперболе $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ взята точка, абсцисса которой равна 3. Вычислить фокальные радиусы этой точки.

Решение. Из уравнении гиперболы следует, что $a^2 = 9,\ b^2 = 16$. Точка $M(3;\ y)$ лежит на гиперболе. Определим c по формуле $c^2 = a^2 + b^2$, т.е. $c = \sqrt{9+16} = 5$.

Расстояния точки $M(x;\ y)$ гиперболы до ее фокусов (Рис.3.5) определяется формулами:

$$r_1 = |ex + a|; \quad r_2 = |ex - a|.$$

Следовательно, $r_1 = \left|\dfrac{c}{a}\ x + a\right| = \dfrac{5}{3}\cdot 3 + 3 = 8,\ r_2 = \left|\dfrac{c}{a}\ x - a\right| = \left|\dfrac{5}{3}\cdot 3 - 3\right| = 2.$

Задача 27. Дан эллипс $\dfrac{x^2}{15}+\dfrac{y^2}{6}=1$. Найти уравнение гиперболы, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы - в вершинах данного эллипса.

Решение. Уравнение гиперболы ищем в виде:

$$\frac{x^2}{a_1^2}-\frac{y^2}{b_1^2}=1.$$

Из уравнения эллипса имеем: $a^2 = 15,\ b^2 = 6$, тогда $c^2 = a^2 - b^2 = 15 - 6 = = 9,\ c = \pm 3$, т.е. координаты фокусов эллипса находятся в точках $F_1(-3;\ 0)$ и $F_2(3;\ 0)$. Согласно условию задачи вершины гиперболы находятся в фокусах эллипса (Рис.3.25).

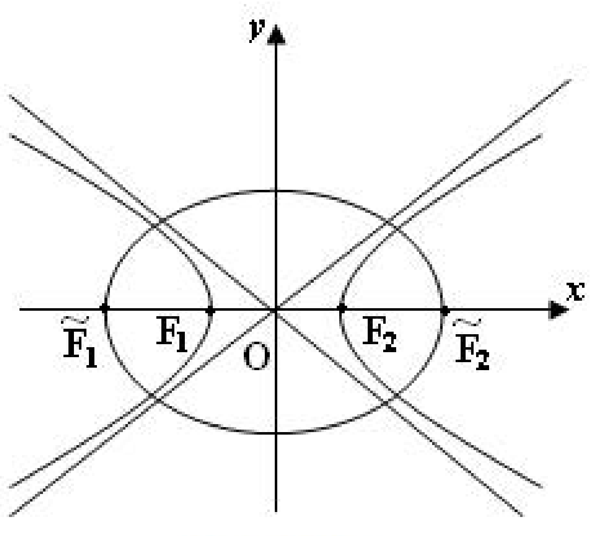


Рис. 3.28

Это означает, что для гиперболы $a_1^2 = 9$, откуда $a_1 = = \pm\sqrt{15}$ и фокусы гиперболы находятся в точках $F_1(-\sqrt{15};\ 0)$ и $F_2(\sqrt{15};\ 0)$. Согласно формуле $c_1^2 = a_1^2 + b_1^2$ для гиперболы, имеем: $b_1^2 = c_1^2 - a_1^2 = 15 - 9 = 6$.

Таким образом, каноническое уравнение гиперболы имеет вид:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{6} = 1.$$

Задача 28. Составить уравнение гиперболы, зная, что расстояние между ее директрисами равно 4, а расстояние между фокусами 16.

Решение. Уравнения директрис гиперболы $x = \pm\frac{a^2}{c}$. Расстояние между фокусами $2c$. Согласно условию $2x = 4,\ 2c = 16$, имеем $2 \cdot \frac{a^2}{c} = 4;\ a^2 = 2c = 16;\ c = 8$, согласно формуле $b^2 = c^2 - a^2$ имеем: $b^2 = 64 - 16 = 48$.

Таким образом, уравнение гиперболы имеет вид:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{48} = 1.$$

Задача 29. Доказать, что произведение расстояний любой точки гиперболы до асимптот есть величина постоянная.

Решение. Уравнения асимптот гиперболы

$$\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{или} \quad b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

имеют вид:

$$y = \pm\frac{b}{a}\,x \quad \text{или} \quad bx \pm ay = 0. \qquad (A)$$

Пусть $M(x;\ y)$ - произвольная точка гиперболы. Ее расстояния до асимптот (A) выразятся следующим образом:

$$d_1 = \left|\frac{bx - ay}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|; \quad d_2 = \left|\frac{bx + ay}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|,$$

откуда

$$d_1 d_2 = \left|\frac{b^2x^2 - a^2y^2}{a^2 + b^2}\right| = \frac{a^2b^2}{c^2},$$

что и требовалось доказать.

Задача 30. На левой ветви гиперболы $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$ найти точку, расстояние которой от асимптоты с отрицательным угловым коэффициентом было бы в два раза меньше, чем расстояние ее от асимптоты с положительным угловым коэффициентом.

Решение. Так как $a^2 = 16;\ b^2 = 4;\ a = 4;\ b = 2$, то на основании уравнения асимптоты с отрицательным угловым коэффициентом $y = -\frac{b}{a}\,x$ имеем $y =$

$= -\dfrac{1}{2}\,x$ или $x + 2y = 0$, и уравнение с положительным угловым коэффициентом есть $y = \dfrac{1}{2}\,x$ или $x - 2y = 0$.

Возьмем на левой ветви гиперболы точку M с координатами $-x$ и y. Ее расстояние d_1 до асимптоты $x+2y = 0$ определяется по правилу нахождения расстояния от точки до прямой, т.е.

$$d_1 = \left|\frac{x + 2y}{\sqrt{5}}\right|.$$

Расстояние d_2 этой точки до асимптоты $x - 2y = 0$ будет

$$d_2 = \left|\frac{x - 2y}{\sqrt{5}}\right|.$$

По условию $d_1 = \dfrac{1}{2}\,d_2$ или $2d_1 = d_2$:

$$2\left|\frac{x + 2y}{\sqrt{5}}\right| = \left|\frac{x - 2y}{\sqrt{5}}\right|.$$

Отсюда или

$$2\frac{x + 2y}{\sqrt{5}} = \frac{x - 2y}{\sqrt{5}} \qquad (A)$$

или

$$2\frac{x + 2y}{\sqrt{5}} = -\frac{x - 2y}{\sqrt{5}} \qquad (B)$$

Из (A) следует, что

$$2x + 4y = x - 2y; \quad x = -6y.$$

Из (B) вытекает, что

$$2x + 4y = -x + 2y; \quad 3x + 2y = 0; \quad x = -\frac{2}{3}\,y.$$

Полученные соотношения $x = -6y$ и $x = -\dfrac{2}{3}\,y$ есть зависимости между абсциссой и ординатой искомой точки. Подставив сначала $x = -6y$ уравнение данной гиперболы, получим $\dfrac{(-6y)^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$, или $\dfrac{9y^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$, откуда $y_1 = -\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$, $\quad y_2 = \dfrac{3\sqrt{5}}{10}$; Подставляя найденные значения y_1 и y_2 в равенстве $x = -6y$, находим $x_1 = \dfrac{6\sqrt{5}}{5}$; $\quad x_2 = -\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$.

Но по условию задачи точка лежит на ветви гиперболы. Значит, абсцисса ее отрицательна, и значение $x_1 = \dfrac{6\sqrt{5}}{5}$ должно быть отброшено. Ордината точки на левой ветви гиперболы может быть как положительной так и отрицательной. Но из того, что $x = -6y$, следует, что y должна иметь положительный знак. Значение $y_1 = -\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$ должно быть отброшено, и окончательно:

$$x = -\frac{6\sqrt{5}}{5}, \quad y = \frac{3\sqrt{5}}{10}.$$

Вторая зависимость $x = -\dfrac{2}{3}\,y$ приводит к мнимым значениям y. На исходной гиперболе нет точки, для которой $x = -\dfrac{2}{3}\,y$. Таким образом, есть только одна точка $M\left(-\dfrac{6\sqrt{5}}{3};\ \dfrac{3\sqrt{5}}{10}\right)$, удовлетворяющая условию задачи.

Задача 31. Определить угол между асимптотами гиперболы, у которой расстояние между фокусами вдвое больше расстояния между директрисами.

Решение. По условию задачи $2c = 2\cdot 2x$, где $2x$ - расстояние между директрисами гиперболы. Откуда получаем, что $c = 2x$ или $c = 2\cdot\dfrac{a^2}{c}$, и $c^2 = 2a^2$. Воспользуемся формулой $c^2 = a^2 + b^2$, получим $2a^2 = a^2 + b^2$ или $a^2 = b^2$, и $a = b$, или $\dfrac{b}{a} = 1$.

Подставляя это значение $\dfrac{b}{a}$ в уравнения асимптот гиперболы $y = \pm\dfrac{b}{a}\,x$, получим:

$$y = -x, \quad y = x.$$

Угол между асимптотами найдем по формуле:

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1\cdot k_2}\right|,$$

где $k_1 = -1, \quad k_2 = -1$. Отсюда получаем, что угол $\varphi = 90^0$.

Задача 32. Вычислить площадь треугольника, образованного асимптотами гиперболы: $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ и прямой $3x - 4y - 7 = 0$:

Решение. Уравнения асимптот гиперболы:

$$y = \pm\frac{b}{a}\,x; \quad a = 5, \quad b = 3, \quad y = \pm\frac{3}{5}\,x.$$

Найдем точки пересечения прямых $y = \pm\dfrac{3}{5}\,x$ и $3x - 4y - 7 = 0$:

$$\begin{cases} y = -\dfrac{3}{5}\,x, \\ 3x - 4y - 7 = 0 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} 3x + \dfrac{12}{5}\,x - 7 = 0, \\ x = \dfrac{35}{27}; \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} y = -\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{35}{27} = -\dfrac{7}{9}, \\ A\left(\dfrac{35}{27};\ -\dfrac{7}{9}\right) \end{array} \right|$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{3}{5}\,x, \\ 3x - 4y - 7 = 0 \end{cases} \qquad \left| \begin{aligned} &3x - \frac{12}{5}\,x - 7 = 0, \\ &3x = 35, \\ &x = \frac{35}{3}; \end{aligned} \right| \qquad \left| \begin{aligned} &y = \frac{3}{5}\cdot\frac{35}{3} = 7, \\ &B\left(\frac{35}{3};\ 7\right). \end{aligned} \right|$$

Площадь полученного треугольника ABO (Рис.3.26) найдем по формуле:

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Возьмем точки в последовательности $A,\ B,\ O$:

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \dfrac{35}{7} & -\dfrac{7}{9} & 1 \\ \dfrac{35}{3} & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{35}{27}\cdot 7 + \frac{35}{3}\cdot\frac{7}{9}\right) = \frac{245}{27} \approx 9,07.$$

$S = 0,9$ кв.ед.

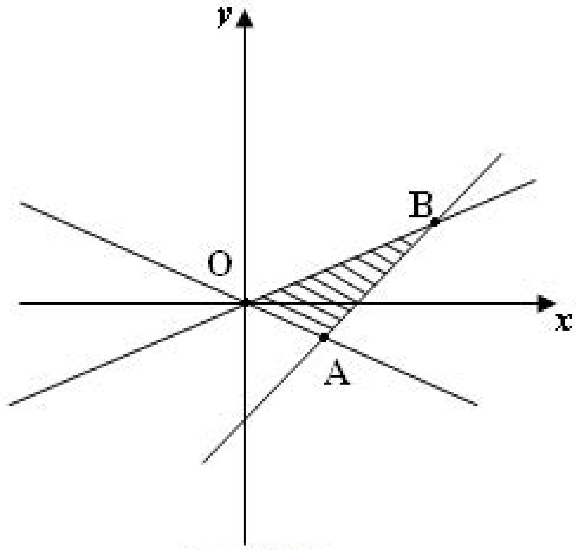


Рис. 3.29

Задача 33. Составить уравнение гиперболы, зная, что расстояние между ее вершинами равно 6 и фокусы ее находятся в точках $(-2;2)$ и $(5;2)$.

Решение. Фокусы гиперболы лежат на прямой $y = 2$ (ординаты фокусов равны 2.)

Следовательно, центр гиперболы лежит не в начале координат, но оси ее параллельны координатным осям (прямая $y = 2$ параллельна оси Ox.)

В этом случае уравнение гиперболы имеет вид:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1,$$

где $(x_0,\ y_0)$ - координаты центра гиперболы.

Центр гиперболы лежит на прямой $y=2$ и делит расстояние между фокусами попалам.

Таким образом,

$$x_0=\frac{-2+5}{2}=\frac{3}{2};\quad y_0=\frac{2+2}{2}=2;\quad A\left(\frac{3}{2};\ 2\right).$$

Далее, согласно условию $2a=6, a=3$ расстояние между фокусами равно:

$$2c=\sqrt{(5+2)^2+(2-2)^2}=7,\quad c=\frac{7}{2}.$$

Использовав соотношение $b^2=c^2-a^2$, найдем $b^2=\dfrac{49}{4}-9=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$.

Уравнение искомой гиперболы имеет вид:

$$\frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}{9}-\frac{(y-2)^2}{\frac{13}{4}}=1.$$

Задача 34. Определить вид и расположение на плоскости линии

$$9x^2-4y^2+18x+8y-31=0.$$

Решение. Преобразуем левую часть уравнения, выделяя полные квадраты:

$$9(x^2+2x+1)-4(y^2-2y+1)-9+4-31=0,$$

$$9(x+1)^2-4(y-1)^2=36.$$

Откуда

$$\frac{(x+1)^2}{4}-\frac{(y-1)^2}{9}=1.$$

Вводим новые координаты по формулам $X=x+1,\ Y=y-1$. Уравнение примет вид:

$$\frac{X^2}{4}-\frac{Y^2}{9}=1.$$

Оно определяет гиперболу с центром в точке $O_1(-1;\ 1)$ и полуосями $a=$ $=2,\ b=3$ (Рис.3.27).

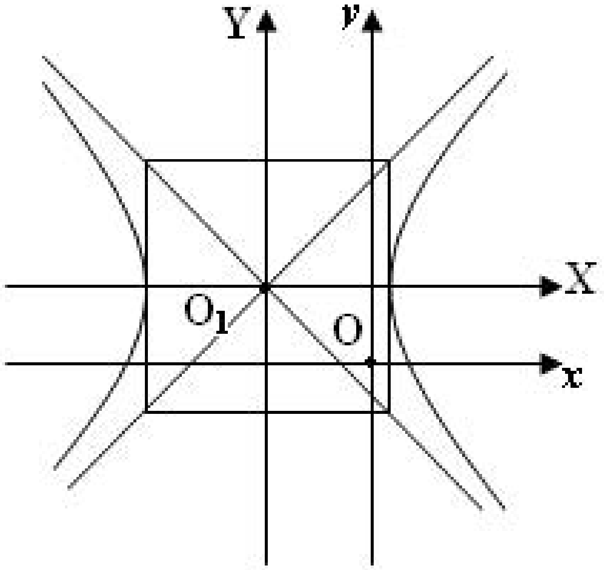


Рис. 3.30

Задача 35. Составить уравнение геометрического места точек, одинаково удаленных от точки $F(0;\ 2)$ и прямой $y = -3$. Определить точки пересечения этой кривой с осями координат.

Решение. Пусть $M(x;\ y)$ - произвольная точка геометрического места. По условию $MF = MK$, где K - основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую $y = -3$. Тогда точка K имеет координаты $K(x;\ -3)$. Так как

$$MF = \sqrt{x^2 + (y-2)^2} \quad \text{и} \quad MK = |y+3|,$$

то

$$\sqrt{x^2 + (y-2)^2} = |y+3|,$$

откуда

$$x^2 + y^2 - 4y + 4 = y^2 + by + 9.$$

Приводя подобные члены, получим уравнение параболы:

$$x^2 = 10y + 5.$$

Для определения точек пересечения с осью Ox необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 = 10y + 5 \\ y = 0. \end{cases}$$

Имеем $x_1 = -\sqrt{5};\ x_2 = \sqrt{5}$. Таким образом, $M_1(-\sqrt{5};\ 0),\ M_2(\sqrt{5};\ 0)$ - две точки пересечения с осью Ox. Полагая в уравнении параболы $x = 0$, получим $y = -\dfrac{1}{2}$. Парабола пересекает ось Oy в точке $M_3(0;\ 0,5)$.

Задача 36. Написать уравнение параболы и ее директрисы, если парабола проходит через точки пересечения прямой $y - x = 0$ и окружности $x^2 + y^2 + 8x = 0$ и симметрична относительно оси Ox.

Решение. Найдем точки пересечения прямой и окружности, для чего решим систему уравнений:

$$\begin{cases} y - x = 0, \\ x^2 + y^2 + 8x = 0. \end{cases}$$

Определяя y из первого уравнения и подставляя его во второе, получим:

$$x^2 + x^2 + 8x = 0,$$

или $2x^2 + 8x = 0$, откуда $2x(x + 4) = 0$ и далее $x_1 = 0,\ x_2 = -4$. Так как $y = x$, то $y_1 = 0,\ y_2 = -4$. Следовательно $O(0;\ 0)$, $M(-4;\ 4)$ - искомые точки пересечения.

Уравнение параболы, симметричной относительно оси Ox и проходящей через начало координат, имеем вид $y^2 = 2px$.

Так как парабола проходит через точку $M(-4; 4)$, то подставляя координаты этой точки в уравнение параболы, определим значение параметра p т.е.;

$$16 = 2p(-4),$$

откуда

$$2p = -4.$$

Следовательно, искомое уравнение параболы имеет вид:

$$y^2 = -4x.$$

Координаты фокуса F находим из уравнения $p = -2$ и $\dfrac{p}{2} = -1$, т.е. $F(-1;\ 0)$ и уравнение директрисы равно $x = 1$.

Задача 37. Осевое сечение зеркала прожектора имеет форму параболы. Определить положение фокуса, если диаметр зеркала 80 см, а глубина его 40 см.

Решение. Оси координат выбираем так, как показано на рис. 3.28. В этой системе осевое сечение зеркала прожектора имеет уравнение $y^2 = 2px$. Из условия задачи следует, что точка $A(40;\ 40)$ лежит на этой параболе, следовательно, $40^2 = 2p \cdot 40$, откуда $2p = 40$, и уравнение параболы принимает вид $y^2 = 40x$. Фокус будет находиться в точке $F(10;\ 0)$.

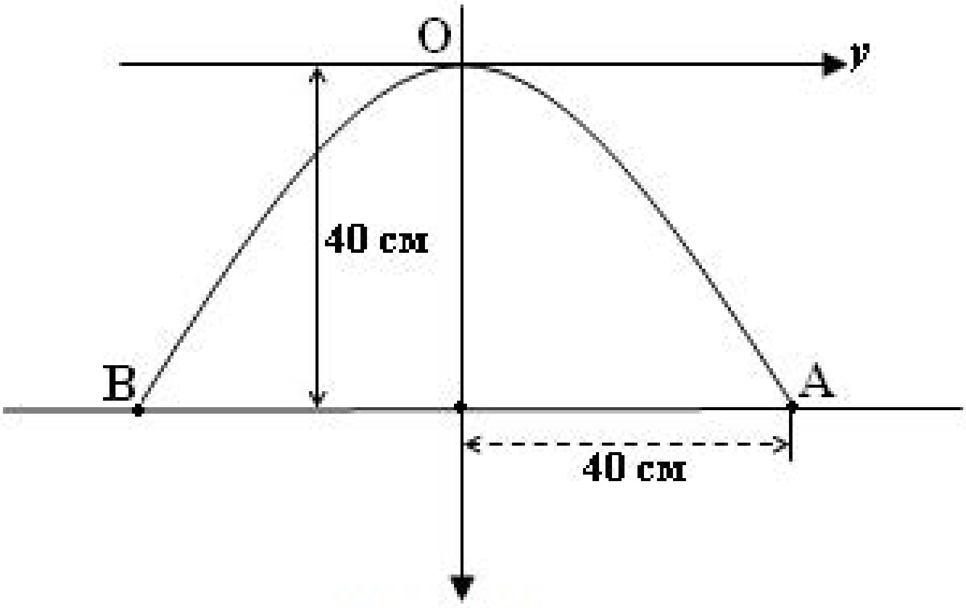


Рис. 3.31

Задача 38. Струя воды фонтана достигает наибольшей высоты 5м на расстоянии 0,5м от вертикали, проходящей через точку O выхода струи. Найти высоту струи над горизонталью Ox на расстоянии 0,85м от точки O.

Решение. Струя воды фонтана имеет форму параболы, вершина которой находится в точке $A(0.5;\ 5)$. Ось симметрии параболы параллельна оси Oy, поэтому уравнение параболы имеет вид:

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0).$$

Подставив значения x_0 и y_0, получим:

$$(x - 0,5)^2 = 2p(y - 5).$$

Для определения p мы можем в уравнение подставить вместо текущей координаты точку $O(0;\ 0)$ (так как струя фонтана выходит из точки O) (Рис.3.29).

$$(-0,5)^2 = 2p(-5),$$

откуда

$$0,25 = -10p, \quad p = -\frac{0,25}{10}.$$

Таким образом, уравнение параболы имеет вид:

$$(x - 0,5)^2 = -\frac{0,25}{5}\ (y - 5),$$

или после преобразований

$$y = 20(x - x^2).$$

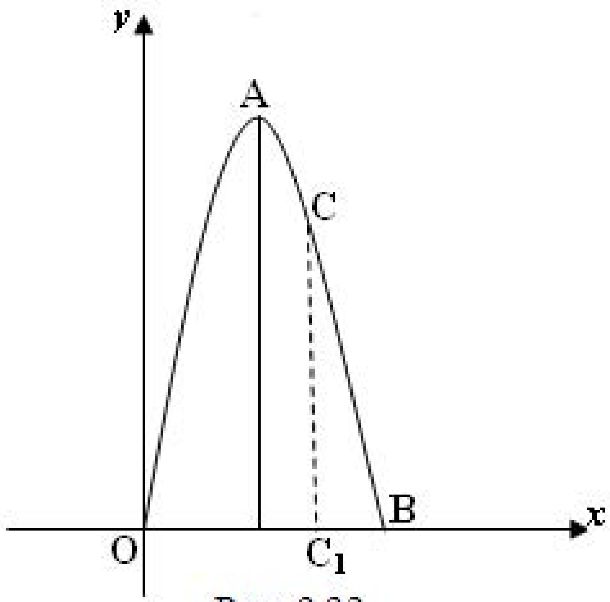


Рис. 3.32

Абсцисса точки C равна 0,85. Ординату высоты струи над точкой C найдем, использовав уравнение параболы

$$y = 20 \cdot (0,85 - 0,85^2) = 20 \cdot 0,85(1 - 0,85) = 17 \cdot 0,15 = 2,5.$$

Таким образом, высота струи $h = 2,5$м.

Задача 39. Написать уравнения касательных к параболе $y^2 = 8x$ проведенных из точки $A(0;\ -2)$. Вычислить расстояние d от точки A до хорды параболы, соединяющей точки касания.

Решение. Уравнение касательной к параболе имеет вид $yy_0 = p(x + x_0)$, где для данной параболы $p = 4$. Тогда имеем $yy_0 = 4(x+x_0)$. Точка $A(0;\ -2)$ лежит на касательной, поэтому $-2y_0 = 4(0 + x_0)$, или $-2y_0 = 4x_0$, откуда $y_0 = -2x_0$. Для нахождения точки пересечения, решим систему уравнений

$$y_0^2 = 8x_0, \quad y_0 = -2x_0.$$

Откуда находим две точки касании $M_1(0;\ 0)$, $M_2(2;\ -4)$. Через эти точки проводим прямую $y = -2x$.

Вычисляем расстояние от точки $A(0;\ -2)$ до прямой $2x + y = 0$.

$$d = \frac{|2 \cdot 0 - 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Задача 40. Через фокус параболы $y^2 = -4x$ проведена прямая под углом 120^0 к оси Ox. Написать уравнения прямой касательной и найти длину образовавшейся хорды.

Решение. Фокус параболы находится в точке $F(-1;\ 0)$, поскольку $2p = -4$, и $\dfrac{p}{2} = -1$. Угловой коэффициент прямой $k = \operatorname{tg} 120^0 = -\sqrt{3}$. Уравнение прямой проходящей через точку $F(-1;\ 0)$ имеет вид $y = -\sqrt{3}(x + 1)$.

Находим точки пересечения прямой с исходной параболой из системы уравнений:

$$y = -\sqrt{3}(x+1), \quad y^2 = -4x.$$

Откуда находим две точки $M_1(-3;\ 2\sqrt{3})$ и $M_2\left(\dfrac{1}{3};\ \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ на параболе. Через эти точки, проводя касательные к параболе по формуле $yy_0 = p(x+x_0)$, будем иметь:

$$x + \sqrt{3}y - 3 = 0; \quad 3x - \sqrt{3}y - 1 = 0.$$

Длину хорды M_1M_2 находим по формуле расстояний между двумя точками:

$$|M_1M_2| = \sqrt{\left(-3+\frac{1}{3}\right)^2 + \left(2\sqrt{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{16}{3}.$$

Задача 41. Дана парабола $x^2 = 4y$. Через точку $N(2;\ 3)$ провести такую хорду, которая делилась бы в этой точке попалам.

Решение. Уравнение искомой хорды запишем в виде:

$$y - 3 = k(x-2) \quad \text{или} \quad y = k(x-2)+3.$$

Для нахождения точек пересечения хорды с параболой необходимо решить систему:

$$x^2 = 4y, \quad y = k(x-2)+3.$$

Подставляя второе уравнение в первое, получим:

$$x^2 - 4kx + 8k - 12 = 0.$$

По теореме Виета для корней x_1 и x_2 этого уравнения находим:

$$x_1 + x_2 = 4k.$$

Так как $N(2;\ 3)$ - середина хорды, то

$$\frac{x_1+x_2}{2} = 2.$$

Следовательно, $2k = 2$, или $k = 1$.

Таким образом, получаем следующее уравнение искомой хорды:

$$y = 1 \cdot (x-2) + 3$$

или

$$x - y + 1 = 0.$$

Задача 42. Написать уравнение касательной к параболе $y^2 = 6x$, проведенной через точку $N(-4;\ 1)$.

Решение. Уравнение касательной ищем в виде:

$$y - 1 = k(x+4) \quad \text{или} \quad y = k(x+4) + 1.$$

Точки пересечения последней прямой с параболой найдем из системы:

$$y^2 = 6x, \quad y = k(x+4) + 1.$$

Для касательной точки пересечения сливаются в одну, поэтому k определяется из условия, что система имеет единственное решение.

Подставляя второе уравнение в первое, получим:

$$k^2(x^2 + 8x + 16) + 2k(x+4) + 1 = 6x$$

или

$$k^2x^2 + 2(4k^2 + k - 3)x + 16k^2 + 8k + 1 = 0.$$

Это уравнение имеет два равных корня, когда его дискриминант равен нулю, т.е.

$$(4k^2 + k - 3)^2 - k^2(16k^2 + 8k + 1) = 0$$

Преобразуя последнее уравнение, получим:

$$-24k^2 - 6k + 9 = 0 \quad \text{или} \quad 8k^2 + 2k - 3 = 0,$$

откуда $k_1 = \pm\dfrac{1}{2};\ k_2 = \dfrac{-3}{4}$.

Таким образом, уравнения касательных будут:

$$y = \pm\frac{1}{2}(x-4) + 1, \quad y = \frac{-3}{4}(x-4) + 1$$

или

$$x - 2y - 1 = 0, \quad 3x + 4y - 16 = 0.$$

Задача 43. Привести к простейшему виду уравнение линии второго порядка $y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$. Определить вид и расположение линии, найти координаты фокуса.

Решение. Так как член с x^2 отсутствует, то надо выделить полный квадрат только по y :

$$y^2 + 2 \cdot 2y + 4 - 4 - 2(x-1) = 0,$$

$$(y+2)^2 - 2(x-1) = 4.$$

Обозначаем:

$$\begin{cases} X = x - 1, \\ Y = y + 2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = X + 1, \\ y = Y - 2. \end{cases}$$

После переноса уравнение примет вид: $Y^2 = 2X^2 + 4$. Данная линия есть парабола (Рис. 3.30). Точка $O_2(-2;\ 0)$ является ее вершиной. Парабола $Y^2 = 2X + 4$ получается из параболы $Y^2 = 2X$ переносом вдоль оси O_1X. Тем самым производится параллельный перенос системы координат XO_1Y из точки $O_1(1;\ -2)$. Величина p для нее равна $p = 1$. Поэтому фокус имеет новые координаты $x = -1;\ y = 0$.

Его старые координаты:

$$x = X + 1 = -1 + 1 = 0;\ y = Y - 2 = 0 - 2 = -2.$$

Если в уравнении $y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$ положить $y = 0$ или $x = 0$, то обнаружим, что парабола пересекает ось Ox в точке $x = 1$, а ось Oy в точках $y_1 = -0,6;\ y_2 = -3,4$.

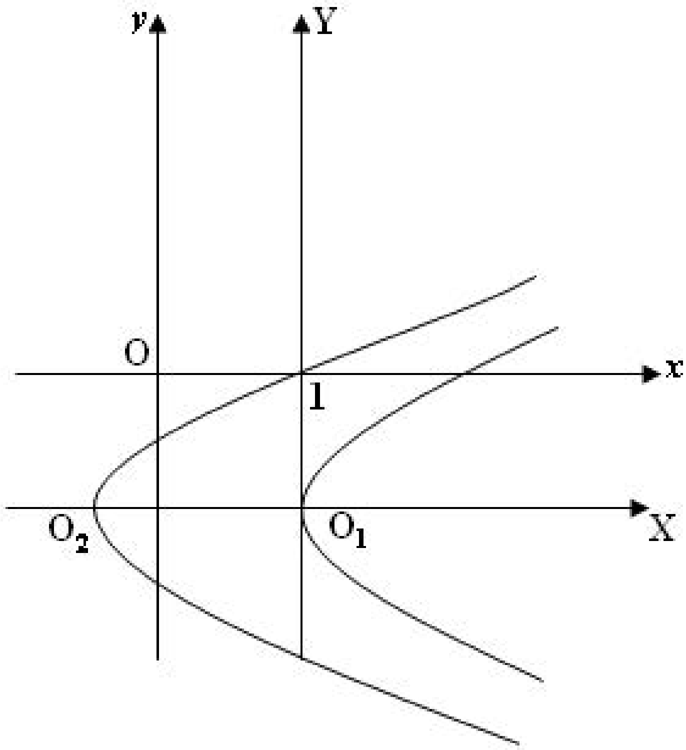


Рис. 3.33

§ 3.11. Задачи для самостоятельного решения

1. Проходит ли окружность $2x^2+2y^2+x+2y=0$ через начало координат?

2. На какой из координатных осей расположены центры окружностей?

$$a)\ x^2+2x+y^2-8=0, \quad b)\ x^2+y^2-3y+2=0?$$

3. Имеют ли прямая $x=3$ и окружность $(x+1)^2+y^2=16$ общую точку?

4. Найти координаты центра и радиус окружности:

$a)$ $x^2+y^2-4x+10y-20=0$;

$b)$ $x^2+y^2+2x-14=0$;

$c)$ $12x^2+12y^2-60x-16y-105=0$.

5. Провести окружность, для которой точки $(2;\ -5)$ и $(8;1)$ служат концами диаметра.

6. Провести окружность с центром в точке $(7;\ 2)$, касающихся:

$a)$ оси X;

$b)$ прямой $5x-12y+26=0$;

$c)$ биссектрисы координатного угла;

$d)$ прямой $5x+2y+8=0$.

7. Провести окружность через точки A, B и C:

$a)$ $A(-6;\ 2)$, $\quad B(1;\ -1)$, $\quad C(-2;\ -10)$;

$b)$ $A(5;\ -3)$, $\quad B(-4;\ 0)$, $\quad C(-59;\ -11)$;

$c)$ $A(4;\ 1)$, $\quad B(1;\ 5)$, $\quad C(-3;\ 2)$.

8. Через точку $(4;\ 2)$ провести касательные к окружности

$$(x-3)^2+(y+5)^2=25.$$

9. Провести окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной прямой:

a) (6; -3), (-6; 15); $5x+2y-319=0$;

b) (2; -12), (-2; -4); $3x+4y-3=0$.

10. Определить центр и радиус круга, описанного около треугольника с вершинами $A(-3;\ -1)$, $B(5;\ 3)$ и $C(6;\ -4)$.

11. Написать уравнение траектории точки $M(x;\ y)$, которая при своем движении остается вдвое ближе к точке $A(0;\ -1)$, чем к точке $B(0;\ 4)$. Построить траекторию движения.

12. Определить, под каким углом пересекаются две окружности: $(x-3)^2+$ $+(y-1)^2=8$, $(x-2)^2+(y+2)^2=2$ (углом между двумя окружностями называется угол между их касательными в точке пересечения).

13. Из точки $C(6;\ -8)$ проведены касательные к окружности $x^2+y^2=25$. Вычислить расстояние d от точки C до хорды, соединяющий точки касания.

14. Определить на какой оси находятся фокусы эллипсов:

$a)$ $16x^2+25y^2=400$; $\quad b)$ $49x^2+4y^2=196$.

15. Написать уравнение эллипсов, зная что:

$a)$ $a=3, \quad e=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$; $\quad b)$ $b=2, \quad e=\dfrac{3\sqrt{5}}{7}$;

$c)$ $a=\sqrt{13}, \quad e=\dfrac{\sqrt{143}}{13}$; $\quad d)$ $b=\sqrt{5}, \quad e=\dfrac{2\sqrt{19}}{9}$.

16. Определить координаты фокусов и эксцентриситет эллипса:

$a)$ $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{36}=1$; $\quad b)$ $x^2+\dfrac{y^2}{5}=1$;

$c)$ $\dfrac{x^2}{29}+\dfrac{y^2}{21}=1$; $\quad d)$ $\dfrac{x^2}{0,3}+\dfrac{y^2}{2}=1$.

17. Вычислить радиусы - векторы, проведенные из фокусов эллипса

$$\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{4}=1$$

в точку, для которой

$$a)\ x=3; \quad b)\ x=4.$$

18. Радиусы - векторы, проведенные из фокусов эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ в точку, абсцисса которой равна 2, суть 6,6 и 3,4. Найти полуоси эллипса.

19. При каком условии прямая $Ax+By+C=0$ касается эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=$ $=1$?

20. Провести касательную и нормаль:

$a)$ к эллипсу $\dfrac{x^2}{400}+\dfrac{y^2}{25}$ в точке $(12;\ 12)$;

$b)$ к эллипсу $\dfrac{x^2}{10}+\dfrac{y^2}{9}=1$ в точке $\left(\dfrac{3\sqrt{10}}{7};\ \dfrac{6\sqrt{10}}{7}\right)$;

21. Провести касательную:

$a)$ к эллипсу $\dfrac{x^2}{400}+\dfrac{y^2}{25}=1$ параллельно прямой $3x+16y+5=0$;

$b)$ к эллипсу $\dfrac{x^2}{225}+\dfrac{y^2}{100}=1$ перпендикулярно к прямой $2x+y=0$.

22. Провести касательную:

$a)$ к эллипсу $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{100}=1$ через точку $(7;\ -2)$;

$b)$ к эллипсу $\dfrac{x^2}{1156}+\dfrac{y^2}{289}=1$ через точку $(16;\ -15)$;

$c)$ к эллипсу $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ через точку $(-3;\ 2)$.

23. Эллипс, симметричный относительно осей координат, фокусы которого находятся на оси Ox, проходит через точку $M(-4;\ \sqrt{21})$ и имеет эксцентриситет $e=\dfrac{3}{4}$. Написать уравнение эллипса и найти фокальные радиусы - векторы точки M.

24. Найти эксцентриситет эллипса, если расстояние между фокусами равно расстоянию между концами большой и малой полуосей.

25. В эллипс $x^2+4y^2=4$ вписать правильный треугольник, одна из вершин которого совпадает с концом большой полуоси. Определить координаты двух других вершин треугольника.

Указание. Написать уравнение одной из сторон, имеющей наклон $k = \operatorname{tg} 30^0$, и найти точки ее пересечения с эллипсом.

26. Найти общие точки эллипса $x^2+4y^2=4$ и окружности, проходящей через фокусы эллипса и имеющей центр в его "верхней"вершине.

27. Эксцентриситет эллипса $e=\dfrac{2}{5}$, расстояние от точки M эллипса до директрисы равно 20. Вычислить расстояние от точки M до фокуса, одностороннего с этой директрисой.

28. Эксцентриситет эллипса $e=0,5$, центр его совпадает с началом координат, одна из директрис дана уравнением $x=16$. Вычислить расстояние от точки M эллипса с абсциссой, равной -4, до фокуса, одностороннего с данной директрисой.

29. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет эллипс, и найти координаты его центра C, полуоси, эксцентриситет и уравнения директрис:

1) $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$;

2) $16x^2+25y^2+32x-100y-284=0$;

3) $4x^3+3y^2-8x+12y-32=0$.

30. Определить, при каких значениях m прямая $y=-x+m$

1) пересекает эллипс $\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{5}=1$;

2) касается его;

3) проходит вне этого эллипса.

31. Определить на какой из координатных осей находятся фокусы гиперболы:

$a)\ \dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1,\quad b)\ \dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=-1.$

32. Вычислить площадь треугольника, образованного асимптотами гиперболы $x^2-y^2=1$ и прямой $x=1$.

33. Определить координаты фокусов и эксцентриситет гиперболы:

$a)\ \dfrac{x^2}{49}-\dfrac{y^2}{576}=1;\quad b)\ \dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{3}=1;$

$c)\ \dfrac{y^2}{81}-\dfrac{x^2}{144}=1;\quad d)\ \dfrac{y^2}{6}-\dfrac{x^2}{10}=1.$

34. Написать уравнения асимптот гиперболы и вычислить угол между ее асимптотами:

$a)\ \dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{3}=1;\quad b)\ \dfrac{x^2}{3}-y^2=1;$

$c)\ \dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{2}=1;\quad d)\ \dfrac{y^2}{3}-\dfrac{x^2}{4}=1.$

35. Вычислить радиус - векторы, проведенные из фокусов гиперболы $\dfrac{x^2}{3}-$

$-\dfrac{y^2}{5}=1$ в точку, для которой

$a)\ x=10;\quad b)\ x=1.$

36. На гиперболе $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ взята точка, абсцисса которой равна 6. Вычислить полуоси гиперболы, зная что радиус - векторы, проведенные из фокусов в эту точку, суть

$a)\ r_1=20,6;\quad r_2=10,6;\quad b)\ r_1=30;\quad r_2=20.$

37. Провести касательную и нормаль:

a) к гиперболе $\dfrac{x^2}{900} - \dfrac{y^2}{225} = 1$ в точке $(-34;\ 8)$;

b) к гиперболе $\dfrac{x^2}{4} - y^2 = 1$ в точке $(-2\sqrt{2};\ -\sqrt{2})$.

38. Провести касательную:

a) к гиперболе $\dfrac{x^2}{81} - \dfrac{y^2}{36} = 1$ параллельно прямой $10x - 12y + 5 = 0$;

b) к гиперболе $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ перпендикулярно к прямой $6x + 5y - 3 = 0$.

39. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс, зная что:

a) расстояние между директрисами равно $\dfrac{8}{3}$ и эксцентриситет $e = \dfrac{3}{2}$;

b) уравнения асимптот $y = \pm\dfrac{3}{4}\,x$ и расстояние между директрисами равно $12\,\dfrac{4}{5}$.

40. Вычислить площадь треугольника, образованного асимптотами гиперболы $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ и прямой $9x + 2y - 24 = 0$.

41. Эксцентриситет гиперболы $e = 2$, центр ее лежит в начале координат, один из фокусов $F(12;\ 0)$. Вычислить расстояние от точки M гиперболы с абсциссой, равной 13, до директрисы, соответствующей заданному фокусу.

42. Фокусы гиперболы совпадают с фокусами эллипса $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$. Составить уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет $e = 2$.

43. Установить, что данное уравнение определяет гиперболу, и найти координаты ее центра C, полуоси, эксцентриситет, уравнения асимптот и уравнение директрис:

$$16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0.$$

44. Точка $M(1;\ -2)$ лежит на гиперболе, фокус которой $F(-2;\ 2)$, а соответствующая директриса дана уравнением $2x - y - 1 = 0$. Составить уравнение этой гиперболы.

45. Найти точки пересечения прямой $4x - 3y - 16 = 0$ и гиперболы

$\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{16} = 1.$

46. Вывести условие, при котором прямая $y = kx+m$ касается гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

47. Найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы $x^2 = -4y$.

48. Какое будет уравнение параболы $y^2 = 2x$, если ее ось симметрии повернуть на 90^0; на 180^0; на -90^0?

49. Каково будет уравнение параболы $y^2 = 2x$, если сохранив направление оси симметрии, вершину ее перенести в точку (2; 0), (0; 2), (-2; 0), (0; -2)?

50. При каком условии парабола

$$y^2 = ax + bx + c$$

$a)$ пересекает ось X в двух точках; $b)$ касается оси X; $c)$ не имеет общих точек с осью X.

51. Определить параметр параболы $y^2 = 2px$, зная, что радиус - вектор, проведенный из фокуса в точку, для которой $x = 3$, равен 5.

52. Для данных парабол указать вершину, точки пересечения с осью X и в каком направлении парабола расходится;

$a)$ $y = 2x^2 - 3x - 8$; $b)$ $y = 5x - 3 - 2x^2$.

53. Провести касательную к параболе $y^2 = 2x$

$a)$ в точке (18; 6),

$b)$ перпендикулярно к прямой $2x + y - 1 = 0$,

$c)$ к параболе $y^2 = 3x$ параллельно прямой $2x - 12y + 3 = 0$.

54. Провести касательную к параболе $y^2 = 6x$ через точку;

$a)$ (0; 3), $b)$ $(2;\ -2\sqrt{3})$, $c)$ (5; 5).

55. Показать, что если прямая $Ax + By + C = 0$ есть касательная к параболе $y^2 = 2px$, то $B^2p = 2AC$.

Указание. Из пропорциональности коэффициентов уравнений $yy_0 = p(x+x_0)$ и $Ax + By + C = 0$ определить x_0 и y_0, подставить их в уравнение $y^2 = 2px$.

56. Струя воды фонтана достигает наибольшей высоты 4м на расстоянии

0,5м от вертикали, проходящей через точку O выхода струи. Найти высоту струи над горизонталью Ox на расстоянии 0,75м от точки O.

57. Парабола $y = ax^2 + bx + c$ проходит через точки $O(0;\ 0)$, $A(-1;\ -3)$ и $B(-2;\ -4)$. Написать уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок оси Ox, отсеченной параболой.

58. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси Ox и отсекающей от прямой $y = x$ хорду длиной $4\sqrt{2}$.

59. Составить простейшее уравнение параболы, если хорда, перпендикулярная к оси симметрии и делящая пополам расстояние между фокусами и вершиной, равна 1.

60. Даны вершины параболы $A(6;\ -3)$ и уравнение ее директрисы $3x - 5y + 1 = 0$. Найти фокус этой параболы.

61. Из точки $P(-3;\ 12)$ проведены касательные к параболе $y^2 = 10x$. Вычислить расстояние d от точки P до хорды параболы, соединяющей точки касания.

62. Установить какую кривую определяет уравнение:

$$a)\ \rho = \frac{15}{3 - 7\cos\varphi};\quad b)\ \rho = \frac{7}{5 - 2\cos\varphi};\quad c)\ \rho = \frac{3}{4 - 4\cos\varphi}.$$

63. Относительно прямоугольной системы координат написать простейшие уравнения следующих кривых;

$$1)\ \rho = \frac{25}{13 - 12\cos\varphi};\quad 2)\ \rho = \frac{1}{3 - 3\cos\varphi};$$

$$3)\ \rho = \frac{9}{4 - 5\cos\varphi};\quad 4)\ \rho = \frac{4}{\sqrt{5} - \cos\varphi}.$$

64. Упростить уравнение кривой

$$8x^2 - 4xy + 5y^2 + 4x - 10y - 319 = 0$$

и найти координаты центра в системе координат x_1Oy_1.

65. Привести к простейшему виду уравнение кривой

$$3x^2 - 4xy - 2x + 4y - 5 = 0$$

и найти координаты центра в системе координат x_1Oy_1.

66. Привести к простейшему виду уравнение

$$9x^2 + 24xy + 16y^2 + 50x - 100y + 25 = 0.$$

Найти уравнение директрисы и координаты фокуса в первоначальной системе координат.

Ответы

2. $a)$ на оси Ox; $b)$ на оси Oy. **4.** $a)$ (2; -5), $r = 7$; $b)$ (-1; 0), $r = \sqrt{15}$, $c)$ $\left(\frac{5}{2};\ \frac{2}{3}\right)$, $r = \frac{\sqrt{139}}{2}$. **5**. $(x-5)^2+(y+3)^2 = 13$. **6**. $a)$ $(x-7)^2+(y-2)^2 = 4$; $b)$ $(x-7)^2+(y-2)^2 = \left(\frac{37}{13}\right)^2$; $c)$ $(x-7)^2+(y-2)^2 = \frac{25}{4}$; $d)$ $(x-7)^2+(y-2)^2 = \left(\frac{47}{\sqrt{29}}\right)^2$. **7**. $a)$ $(x+2)^2+(y+5)^2 = 25$; $b)$ $(x+20)^2+(y+63)^2 = (65)^2$; $c)$ $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2$. **8**. $3x-4y-4 = 0$ и $4x+3y-22 = 0$. **9**. $a)$ $(x-6)^2+(y-10)^2 = (13)^2$ и $\left(x+\frac{183}{2}\right)^2+(y+55)^2 = \left(\frac{221}{2}\right)^2$; $b)$ $(x-2)^2+(y+7)^2 = (5)^2$ и $(x+58)^2+(y+37)^2 = (65)^2$. **10**. Центр $(2;\ -1)$, $r = 5$. **11**. $x^2+y^2 = 4$. **12**. 90^0. **13**. $d = 7,5$. **14** $a)$ на оси Ox; $b)$ на оси Oy. **15**. $a)$ $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4} = 1$; $b)$ $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{4} = 1$; $c)$ $\frac{x^2}{13}+\frac{y^2}{2} = 1$; $d)$ $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{5} = 1$. **16**. $a)$ $(-8;\ 0)$ и $(8;\ 0)$; $e = 0,8$; $b)$ $(0;\ -2)$ и $(0;\ 2)$, $e = 0,4$; $c)$ $(-2\sqrt{2};\ 0)$ и $(2\sqrt{0};\ 0)$, $e = \frac{2\sqrt{58}}{29}$; $d)$ $(0;\ -0,1\sqrt{170})$ и $(0;\ 0,1\sqrt{170})$, $e = 0,1\sqrt{85}$. **17**. $a)$ $r_1 \approx 6,44$; $r_2 \approx 1,30$; $b)$ невозможно (на данном эллипсе нет такой точки). **18**. $a = 5$, $b = 3$. **19**. $A^2a^2+B^2b^2 = C^2$. **20**. $a)$ касательная: $9x+16y-300 = 0$, нормаль: $16x-9y-84 = 0$; $b)$ касательная: $3x+20y-7\sqrt{10} = 0$; нормаль $20x-3y-6\sqrt{10} = 0$. **21**. $a)$ $3x+16y\pm 100 = 0$; $b)$ $x-2y\pm 25 = 0$. **22**. $a)$ $8x+3y-50 = 0$ и $3x-2y-25 = 0$; $b)$ $4x-15y-289 = 0$; $c)$ невозможно. **23**. $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{28} = 1$; $r_1 = 11$; $r_2 = 5$. **24**. $e = \sqrt{0,4}$. **25**. $\left(\frac{2}{7};\ \pm\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$. **26**. $\left(\pm\frac{4\sqrt{2}}{3};\ \frac{1}{3}\right)$ и $(0;\ -1)$. **27**. 8. **28**. 10.

29. 1) $C(3;\ -1)$, полуоси 3 и $\sqrt{5}$, $e = \frac{2}{3}$, уравнения директрис : $2x - 15 =$

$= 0,\ 2x+3 = 0;$ 2) $C(-1;\ 2)$ полуоси 5 и 4, $e = \dfrac{3}{5}$, уравнения директрис: $3x - 22 = 0,\ 3x + 28 = 0$; 3) $C(1;\ -2)$, полуоси $2\sqrt{3}$ и 4, $e = \dfrac{1}{2}$, уравнения директрис: $y - 6 = 0,\ y + 10 = 0$. **30**. 1) При$|m| < 5$ – пересекает эллипс; 2) при $|m| = \pm 5$ – касается эллипса; 3) при$|m| > 5$ – проходит вне эллипса. **31**. *a*) на оси Ox; *b*) на осиOy. **32**. $S = 1$. **33**. *a*) $(-25;\ 0)$ и $(25;\ 0)$; $e = \dfrac{25}{7}$; *b*) $(-2\sqrt{2};\ 0)$ и $(2\sqrt{2};\ 0)$; $e = \dfrac{2\sqrt{10}}{5}$; *c*) $(0;\ -15)$ и $(0;\ 15)$; $e = \dfrac{15}{9}$; *d*) $(0;\ -4)$ и $(0;\ 4)$; $e = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$. **34**. *a*) $x - y = 0$ и $x + y = 0$; $2t = 90^0$; *b*) $x - \sqrt{3}y = 0$ и $x + \sqrt{3} = 0$; $2t = 60^0$; *c*) $2x - \sqrt{10}y = 0$ и $2x + \sqrt{10}y = 0$; $2t \approx 64^018'$; *d*) $3x - \sqrt{15}y = 0$ и $3x + \sqrt{15}y = 0$; $2t \approx 98^014'$. **35**. *a*) $r_1 = \dfrac{20\sqrt{6}}{5} + \sqrt{3} \approx 18,1$; $r_2 = \dfrac{20\sqrt{6}}{5} - \sqrt{3} \approx 14,6$; *b*) невозможно (на данной гиперболе нет такой точки). **36**. *a*)$a = 5,\ b = 12$; *b*) $a = 5,\ b = \dfrac{5\sqrt{589}}{6}$. **37**. *a*) касательная: $17x + 16y + 450 = 0$; нормаль: $16x - 17y + 680 = 0$; *b*) касательная: $x - 2y + \sqrt{2} = 0$; нормаль: $2x + y + 5\sqrt{2} = 0$. **38**. *a*) $5x - 6y \pm 27 = 0$; *b*) $5x - 6y \pm 24 = 0$. **39**. *a*) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{5} = 1$; *b*) $\dfrac{x^2}{64} - \dfrac{y^2}{36} = 1$. **40**. $S = 12$. **41**. 10. **42**. $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{36} = 1$ **43**. $C(2;\ -3)$, $a = 3,\ b = 4,\ e = \dfrac{5}{3}$, уравнения директрис: $5x - 1 = 0,\ 5x - 19 = 0$, уравнения асимптот: 4x-3y-17=0, 4x+3y+1=0. **44**. $91x^2 - 100xy + 16y^2 - 136x + 86y - 47 = 0$. **45**. $\left(\dfrac{25}{4};\ 3\right)$ – прямая касается гиперболы. **46**. $k^2a^2 - b^2 = m^2$. **47**. $(0;\ -1)$, $y = 1$. **48**. $x^2 = 2y$; $y^2 = -2x$; $x^2 = -2y$. **49**. $y^2 = 2(x-2)$; $(y-2)^2 = 2x$; $y^2 = 2(x+2)$; $(y+2)^2 = 2x$. **50**. *a*) если $b^2 - 4ac > 0$; *b*) если $b^2 - 4ac = 0$; *c*) если $b^2 - 4ac < 0$. **51**. $p = 4$. **52**. *a*) вершина: $\left(\dfrac{3}{4};\ -\dfrac{73}{8}\right)$; точки пересечения с осью X : $\left(\dfrac{3 - 7\sqrt{73}}{4};\ 0\right)$ и $\left(\dfrac{3 + \sqrt{73}}{8};\ 0\right)$; расходится вверх; *b*) вершина: $\left(\dfrac{5}{4};\ -\dfrac{1}{8}\right)$; точки пересечения с осьюX : $(1;\ 0)$ и $\left(\dfrac{3}{2};\ 0\right)$; расходится вверх. **53**. *a*) $x + 6y + 18 = 0$; *b*) $x - 2y + 2 = 0$; *c*) $x - 6y + 27 = 0$. **54**. *a*) $x = 0$ и $x - 2y + 6 = 0$; *b*) $3x + 2\sqrt{3}y + 6 = 0$;) невозможно. **56**. Уравнение струи; $y = 16(x - x^2)$;

при $x = 0,75$м, $y = 3$м. **57**. $x^2+y^2+4y = 0$. **58**. $y^2 = 4x$; $y^2 = -4x$. **59**. $y^2 = = \sqrt{2}x$. **60**. $(9;\ -8)$. **60**. $d = 13\frac{5}{13}$. **62**. $a)$ гипербола; $b)$ эллипс; $c)$ парабола.

63. 1) $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$; 2)$y^2 = \frac{2}{3}\ x$; 3) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$; 4) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$.

64.Кривая-эллипса. Его каноническое уравнение $\frac{x_2^2}{81} + \frac{y_2^2}{36} = 1$. В системе координат x_1Oy_1 центр эллипса имеет координаты $O_1\left(\frac{2}{\sqrt{5}};\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

65. Кривая-гипербола. Каноническое уравнение ее

$$\frac{y_2^2}{1} - \frac{x_2^2}{4} = 1.$$

В системе координат x_1Oy_1 координаты центра гиперболы $O_1\left(\frac{3}{\sqrt{2}};\ -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

66. Кривая-парабола. Ее каноническое уравнение $y_2^2 = 4x_2$. В первоначальной системе координат фокус параболы имеет координаты $F\left(-\frac{1}{5};\ \frac{7}{5}\right)$, а уравнение директрисы $4x - 3y - 5 = 0$.

Аналитическая геометрия в пространстве
Глава IV
Метод координат в пространстве

§ 4.1. Координаты в пространстве

Пусть в пространстве через точку O (начало координат) проходят три взаимно перпендикулярные координатные оси Ox, Oy, Oz, направленные так, что ось Oz проходит от ног к голове, вращение от оси Ox к оси Oy на угол $90°$ кажется проходящим против часовой стрелки. Положение геометрических образов в пространстве определяется по отношению к данной прямоугольной системе координат и трёх плоскостей, попарно их соединяющих (координатные плоскости). На каждой оси выбирается положительное направление и единица длины. Орты осей Ox, Oy, Oz, обозначают соответственно через $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ (рис. 4.1).

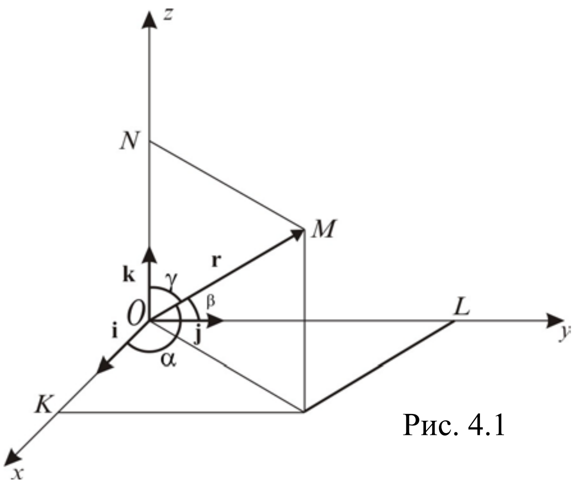


Рис. 4.1

Любая точка M пространства имеет на каждой из указанных осей определенную координату. Обозначим через K, L, и N, проекции точки M на оси координат (соответственно Ox, Oy и Oz). Эти координаты носят название $\boldsymbol{x}$ – абсцисса, $\boldsymbol{y}$ – ордината, $\mathbf{z}$ – аппликата. Точки K, L, и N, являются точками пересечения с осями координат плоскостей, перпендикулярных этим осям и проходящих через точку M. То, что M имеет координаты x, y, z записываются так: $M(x, y, z)$.

Вектор $\mathbf{OM} = \mathbf{r}$, идущий от начала координат к точке M называется ***радиусом – вектором*** этой точки, и мы имеем:

$$|\mathbf{r}|^2 = x^2 + y^2 + z^2. \tag{4.1}$$

Проекции вектора $\boldsymbol{OM}$ на оси координат равны координатам их концов без координаты начала $O(0;0;0)$, т.е.:

$$x = np_x\mathbf{r}, \;\; y = np_y\mathbf{r}, \;\; z = np_z\mathbf{r}. \tag{4.2}$$

Таким образом, координата точки представляет собой проекцию её радиуса – вектора на соответствующую ось координат. Итак,

$$x = |\mathbf{r}| \cdot \cos\alpha, \;\; y = |\mathbf{r}| \cdot \cos\beta, \;\; z = |\mathbf{r}| \cdot \cos\gamma, \tag{4.3}$$

где α, β, γ обозначают углы между радиусом-вектором и положительным направлением трёх осей координат (Рис. 4.1). Эти углы связаны соотношением

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{4.4}$$

Соотношение (4.4) справедливо для углов, образованных любой прямой с тремя взаимно перпендикулярными осями.

Направление отрезка AB, где $A(x_1;y_1;z_1)$ и $B(x_2;y_2;z_2)$, характеризуется углами α,β,γ, которые он образует с положительными направлениями осей координат:

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{np_x\mathbf{AB}}{|\mathbf{AB}|} = \frac{x_2-x_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}},\\ \cos\beta &= \frac{np_y\mathbf{AB}}{|\mathbf{AB}|} = \frac{y_2-y_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}},\\ \cos\gamma &= \frac{np_z\mathbf{AB}}{|\mathbf{AB}|} = \frac{z_2-z_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}.\end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

Расстояние между точками $A(x_1;y_1;z_1)$ и $B(x_2;y_2;z_2)$ определяется по формуле:

$$|\mathbf{AB}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\,. \tag{4.6}$$

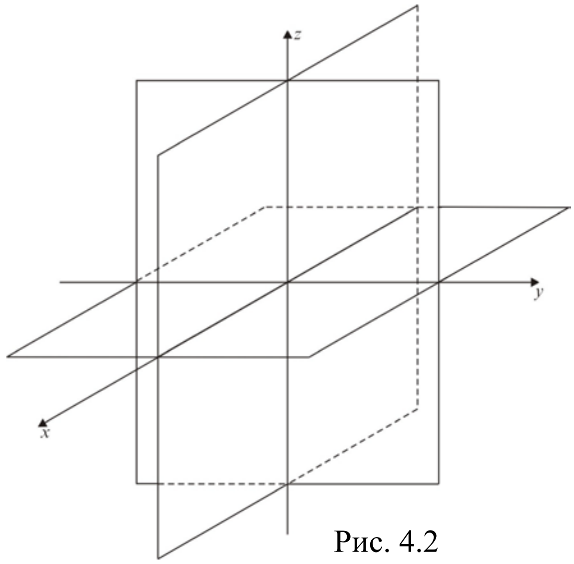


Рис. 4.2

Если направление двух прямых дано углами (α,β,γ) и (α',β',γ'), то угол φ между ними вычисляется по формуле:

$\cos\varphi = \cos\alpha\cdot\cos\alpha' + \cos\beta\cdot\cos\beta' + \cos\gamma\cdot\cos\gamma'$.

Условия перпендикулярности прямых определяется равенством:

$\cos\alpha\cdot\cos\alpha' + \cos\beta\cdot\cos\beta' + \cos\gamma\cdot\cos\gamma' = 0$.

Три координатные плоскости (рис. 4.2) делят пространство на восемь частей (октантов). Координаты точек расположенных в различных частях, имеют различные знаки. Нумерация октантов приведена в таблице 4.1.

Точки, лежащие на координатных плоскостях, имеют одну из координат, равную нулю; точки, лежащие на осях координат, имеют две координаты, равные нулю; начало координат имеет все три координаты, равные нулю.

Таблица 4.1.

Координата	Октант							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Абсцисса	+	-	-	+	+	-	-	+
Ордината	+	+	-	-	+	+	-	-
Аппликата	+	+	+	+	-	-	-	-

Зная три координаты, можно построить одну – единственную точку. Эта точка служит концом ломанной линии, которую мы получим, отложив на оси Ox отрезок OA, величина которого равна абсциссе, из конца его параллельно оси Oy отрезок AB, величина которого равна ординате, и из его конца параллельно оси Oz - отрезок BM, величина которого равна аппликате точки. На рис. 4.3 построена точка M(+3;+2;+3).

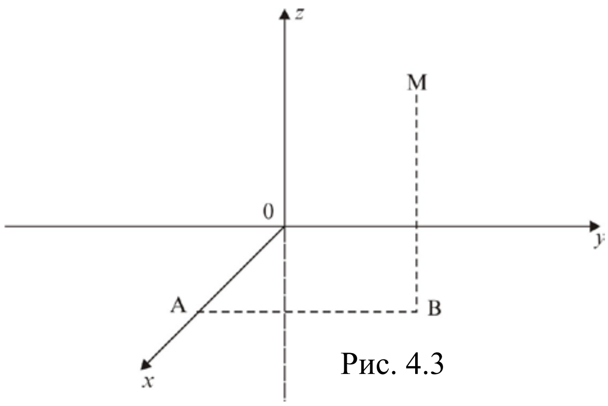


Рис. 4.3

Таким образом, установлено взаимно однозначное соответствие между точками пространства и тройками чисел $(x; y; z)$.

Вводя в пространстве декартову систему координат, мы получаем возможность определить положение любой точки с помощью троек чисел – её координат.

§ 4.2. Деление отрезка в данном отношении

Пусть даны две точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ (Рис. 4.4). Установим на прямой AB направление (например от A к B). Требуется найти на этой прямой точку $C(x_0; y_0; z_0)$, которая разделила бы отрезок AB в отношении

$$\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{q_1}{q_2}, \text{ где } q_1 > 0,\ q_2 > 0.$$

Для этого заметим что векторы $\boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{CB}$ параллельные и направлены в одну сторону. Но тогда вектор $\boldsymbol{AC}$ получается из $\boldsymbol{CB}$ умножением на $\frac{q_1}{q_2}$, т.е.

$$\mathbf{AC} = \frac{q_1}{q_2}\ \mathbf{CB}.$$

Координаты векторов $\mathbf{AC} = \mathbf{r_0} - \mathbf{r}_1$ и $\frac{q_1}{q_2}\mathbf{CB} = \frac{q_1}{q_2}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0)$ соответственно равны.

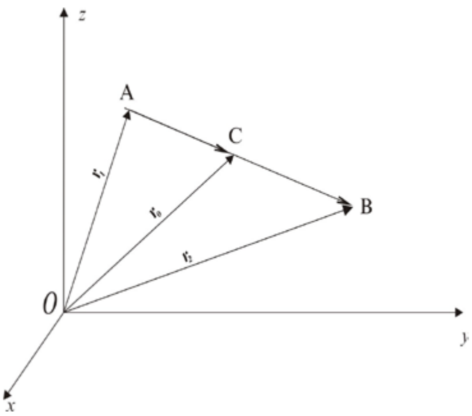


Рис. 4.4

Так как у равных векторов координаты равны, то

$$x_0 - x_1 = \lambda(x_2 - x_0),$$
$$y_0 - y_1 = \lambda(y_2 - y_0), \qquad \frac{q_1}{q_2} = \lambda,$$
$$z_0 - z_1 = \lambda(z_2 - z_0).$$

Определяя x_0 из первого и последнего равенств, получим:

$$x_0\left(1+\frac{q_1}{q_2}\right)=x_1+\frac{q_1}{q_2}x_2$$

и

$$x=\frac{x_1q_2+x_2q_1}{q_1+q_2}. \qquad (4.7)$$

Аналогично,

$$y_0=\frac{y_1q_2+y_2q_1}{q_1+q_2},\; z_0=\frac{z_1q_2+z_2q_1}{q_1+q_2}.$$

В случае $\frac{q_1}{q_2}=1$ получим формулы деления отрезка пополам:

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y_0=\frac{y_1+y_2}{2},\; z_0=\frac{z_1+z_2}{2}. \qquad (4.8)$$

Если, не меняя направления осей, перенести начало координат в точку $O'(a,b,c)$, то координаты любой точки (x,y,z) выразятся через новые координаты (x',y',z') той же точки следующим образом:

$$x=x'+a,\; y=y'+b,\; z=z'+c. \qquad (4.9)$$

Если, не меняя начала координат, изменить направление осей так, чтобы новые оси образовали со старой осью **Ox** углы α, α' и α'', со старой осью **Oy** углы β, β' и β'', и со старой осью **Oz**, углы γ, γ', γ'', то:

$$\left.\begin{aligned}x&=x'\cdot\cos\alpha+y'\cdot\cos\alpha'+z'\cdot\cos\alpha'',\\ y&=x'\cdot\cos\beta+y'\cdot\cos\beta'+z'\cdot\cos\beta'',\\ z&=x'\cdot\cos\gamma+y'\cdot\cos\gamma'+z'\cdot\cos\gamma''.\end{aligned}\right\} \qquad (4.10)$$

Задача 1. Построить точку $M(-4;4;4\sqrt{2})$, найти её радиус – вектор **OM** и его углы с осями координат. Вычислить сумму квадратов направляющих косинусов.

Р е ш е н и е. Построение показано на рис. 4.5. Далее по формулам (4.1), (4.4) и (4.5) имеем:

$$r=\mathbf{OM}=\sqrt{(-4)^2+4^2+(4\sqrt{2})^2}=\sqrt{64}=8,$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\mathbf{OM}|}=-\frac{4}{8}=-\frac{1}{2};\;\cos\beta=\frac{1}{2};\;\cos\gamma=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{2}{4}=1.$$

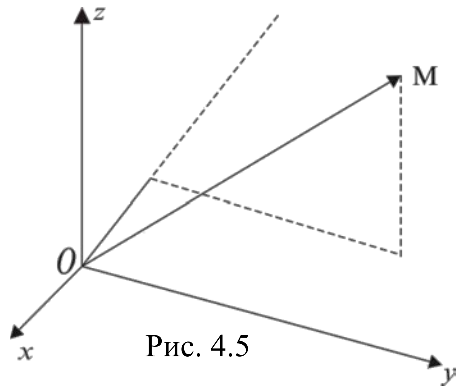


Рис. 4.5

Задача 2. Определить величину и направление силы, составляющие которой по осям координат имеют следующие величины: X=10, Y=5, Z=10.

Р е ш е н и е. $|\mathbf{F}|=\sqrt{10^2+5^2+10^2}=\sqrt{225}=15.$

$$\cos\alpha = \frac{X}{|\mathbf{F}|} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}; \quad \cos\beta = \frac{Y}{|\mathbf{F}|} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}; \quad \cos\gamma = \frac{Z}{|\mathbf{F}|} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3};$$

Откуда, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = 1.$

Задача 3. Вычислить координаты точки M, зная, что её радиус – вектор равен 8 единицам и наклонен к оси Ox под углом $45°$, а к оси Oz под углом $60°$.

Р е ш е н и е. Поскольку величина радиус – вектора $\mathbf{OM} = 8$, то согласно формулам (4.5) и условиям задачи, имеем:

$\cos\alpha = \cos 45° = \frac{X}{|\mathbf{OM}|} = \frac{X}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2};$ откуда $X = 4\sqrt{2}.$

Аналогично $\cos 60° = \frac{Z}{8} = \cos\gamma; \quad \frac{Z}{8} = \frac{1}{2}; \; Z = 4;$

Откуда, согласно равенства $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$ получим:

$$\frac{1}{2} + \cos^2\beta + \frac{1}{4} = 1, \quad \cos^2\beta = \frac{1}{4}; \quad \cos\beta = \pm\frac{1}{2};$$

или $\beta_1 = 60°$ и $\beta_2 = 120°.$

Тогда $\cos 60° = \frac{У}{8} = \frac{1}{2}$ и $У_1 = 4, \quad \cos 120° = \frac{У}{8} = -\frac{1}{2}$ и $У_2 = -4$.

Таким образом, условиям задачи удовлетворяют две точки: $M_1(4\sqrt{2};4;4)$ и $M_2(4\sqrt{2};-4;4).$

Задача 4. Доказать, что треугольник с вершинами $A(3;-1;2)$, B(0,-4,2) и $C(-3;2;1)$ равнобедренный.

Р е ш е н и е. Согласно формуле (4.6), получим:

$$|AB| = \sqrt{(3-0)^2 + (-1+4)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2},$$
$$|AC| = \sqrt{(3+3)^2 + (-1-2)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{46},$$
$$|BC| = \sqrt{(-3)^2 + (2+4)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{46}.$$

Откуда получим, что $|AC| = |BC|,$ т.е. треугольник ABC является равнобедренным.

Задача 5. Даны точки $A(3;3;3)$ и $B(-1;5;7).$ найти координаты точек C и D, делящих отрезок AB на три равные части.

Р е ш е н и е. По условию $AC:CB = 1:2, \; AD:DB = 2:1.$ Подставляя в формуле (4.7) значения координат точек A и B, получим координаты точки C:

$$x_C = \frac{x_A + \lambda \cdot x_B}{1+\lambda} = \frac{3 + \frac{1}{2}\cdot(-1)}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{5}{3}; \quad y_C = \frac{3 + \frac{1}{2}\cdot 5}{\frac{3}{2}} = \frac{11}{3}; \quad z_C = \frac{3 + \frac{1}{2}\cdot 7}{\frac{3}{2}} = \frac{13}{3}.$$

Координаты точки D находятся с помощью тех же формул при $\lambda = 2$:

$$x_D = \frac{3 + 2\cdot(-1)}{1+2} = \frac{1}{3}; \; y_D = \frac{3 + 2\cdot 5}{3} = \frac{13}{3}; \quad z_D = \frac{3 + 2\cdot 7}{3} = \frac{17}{3}.$$

Следовательно, $C\left(\frac{5}{3};\frac{11}{3};\frac{13}{3}\right),\ D\left(\frac{1}{3};\frac{13}{3};\frac{17}{3}\right).$

§ 4.3. Геометрический смысл уравнений в пространстве

1. Поверхность и её уравнение. В аналитической геометрии поверхность рассматривается как геометрическое место точек, её составляющих.

Введём в пространстве прямоугольную декартову систему координат XYZ и рассмотрим какую-нибудь поверхность. Пусть $M(x,y,z)$ - произвольная точка этой поверхности. Положение точки M должно подчиняться определенному условию, характеризующему данное геометрическое место точек, т.е. мы выражаем посредством уравнения между ***x*, *y*** и ***z*** свойство, общее всем точкам поверхности и только им. Таким образом составляется уравнение между переменными ***x*, *y*** и ***z*,** которому удовлетворяют координаты произвольной точки $M(x,y,z)$ данной поверхности и только они одни. Это уравнение называют уравнением поверхности и обозначается:

$$F(x,y,z)=0. \tag{4.11}$$

Таким образом, *уравнение поверхности есть такое уравнение с тремя переменными, которому удовлетворяют, координаты всех точек, данной поверхности и притом только этих точек (т. е этому уравнению не удовлетворяют координаты точек, не принадлежащих данной поверхности).*

Уравнение (4.11) можно решить относительно одной из переменных, например, относительно z:

$$z=f(x,y) \tag{4.12}$$

Если функция $f(x,y)$ - однозначная, то поверхность, изображающая уравнение (4.12), встречает каждый перпендикуляр к плоскости XY один раз, если функция $f(x,y)$- многозначная, то поверхность (4.12) встречает каждый перпендикуляр к плоскости XY несколько раз.

Рассмотрим пример на составление уравнения поверхности, заданной как геометрическое место точек.

Вывести уравнение сферы радиуса R с центром в начале координат.

Все точки этой сферы находятся на расстоянии R от начала координат. Возьмём произвольную точку $M(x,y,z)$, лежащую на сфере. Записывая условие, определяющее точки сферы, получим: $OM=R,$ т.е.

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=R.$$

Это и есть уравнение данной сферы. Освободимся от радикала:

$$x^2+y^2+z^2=R^2. \tag{4.13}$$

Геометрически очевидно, что уравнение (4.13) удовлетворяется для всех точек сферы и только для них. Для точек, лежащих внутри шара, ограниченно сферой (4.13).

$$x^2 + y^2 + z^2 < R^2,$$

а для точек лежащих вне этого шара, $x^2 + y^2 + z^2 > R^2$.

Уравнение (4.13) можно решить относительно z:

$$z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,. \tag{4.14}$$

Оказывается, z есть двузначная функция от $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$. Геометрически это понятно: перпендикуляр к плоскости XY встречает искомую сферу два раза. Если верхнюю точку пересечения перпендикуляра со сферой обозначить M_1, а нижнюю M_2, то PM_1 и PM_2, где $P(x;y)$ - точка плоскости XY, равны по абсолютной величине и противоположны по знаку, как и должно быть по уравнению (4.14).

$$PM_1 = z_1 = +\sqrt{R^2 - x^2 - y^2},$$
$$PM_2 = z_2 = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

Область существования функции (4.14) такова:

$$x^2 + y^2 \le R^2\,.$$

Графически эта область существования изображается на плоскости XY кругом вместе с окружностью радиуса R с центром в начале координат.

2. Уравнение, содержащее не все три координаты. Рассмотрим тот частный случай уравнения (4.11), когда оно не содержит одной из координат. Пусть, например, дано уравнение

$$y^2 = 4x\,. \tag{4.15}$$

Как геометрически изображается в пространстве это уравнение?

Будем принимать во внимание следующее положение:

При геометрическом изображении уравнений в пространстве всякое уравнение рассматривается как условие, наложенное на три координаты. Если уравнение не содержит одной координаты, то это значит, что на неё не наложено никакого условия, т.е. ей можно придавать произвольные значения, не независящие от значений двух других координат.

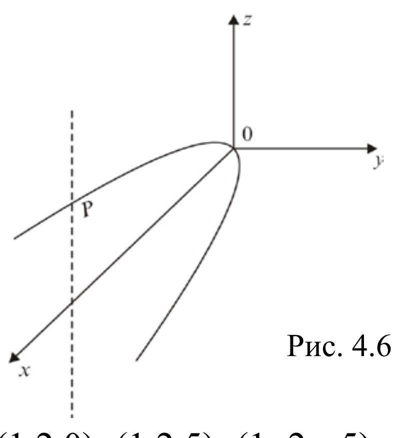


Рис. 4.6

Уравнение (4.15) определяет в пространстве геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют этому уравнению. Например, точки (1,2,0), (1,2,5), (1, 2, -5) и вообще (1, 2, -13) принадлежат этому геометрическому месту, независимо от того, какое значение мы придаём **z**.

Можно сказать, что в аналитической геометрии в пространстве мы всякое уравнение рассматриваем как уравнение с тремя координатами, даже если оно содержит их меньше. Для ясности можно написать уравнение (4.15) в виде:

$$y^2 = 4x + 0 \cdot z$$

Уравнение (4.15) на плоскости XY, изображается параболой (Рис. 4.6). Возьмём на этой параболе какую-нибудь точку P; её координаты удовлетворяют уравнению. Восстановим в точке P перпендикуляр к плоскости XY. Все точки этого перпендикуляра имеют координаты $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ те же, что у точки P, и отличаются друг от друга только координатой $\mathbf{z}$. Следовательно, все точки этого перпендикуляра имеют координаты, удовлетворяющие уравнению (4.15), и, значит, все точки этого перпендикуляра входят в состав геометрического места, изображающего уравнение (4.15).

Это рассуждение относится ко всякой точке параболы. Поэтому мы можем во всех точках параболы восстановить перпендикуляры к плоскости XY. Эти перпендикуляры образуют цилиндрическую поверхность, для которой парабола $y^2 = 4x$ служит направляющей (Рис. 4.7).

Всякое уравнение

$$\varphi(x, y) = 0, \qquad (4.16)$$

не содержащее z, в пространстве изображается цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси z. Это же уравнение, рассматриваемое в плоскости XY, есть уравнение направляющей этого цилиндра.

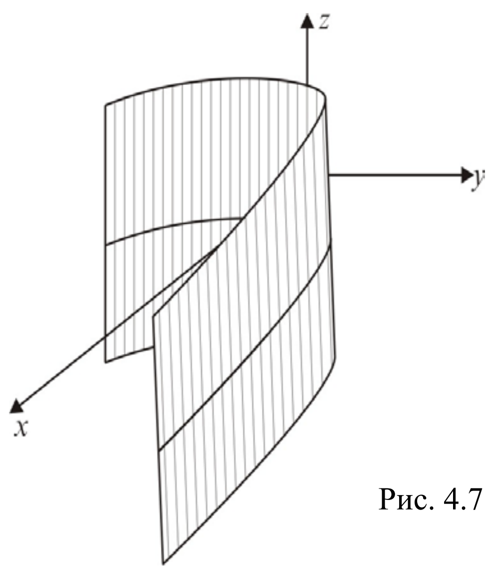


Рис. 4.7

Аналогично изображаются уравнения, не содержащие x и y.

Задача 6. Какой поверхностью изображается уравнение

$$y^2 + z^2 = R^2?$$

Р е ш е н и е. Это уравнение не содержит $\boldsymbol{x}$ и следовательно, оно изображается цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси X. Направляющей этого цилиндра служит линия

$$y^2 + z^2 = R^2$$

в плоскости YZ, т.е. окружность радиуса R с центром в начале координат (Рис. 4.8).

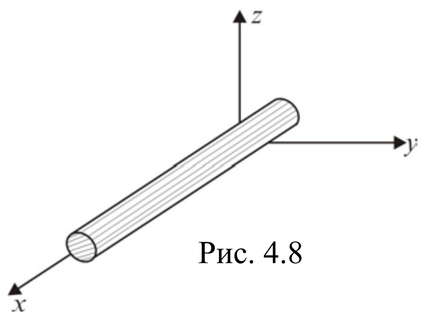


Рис. 4.8

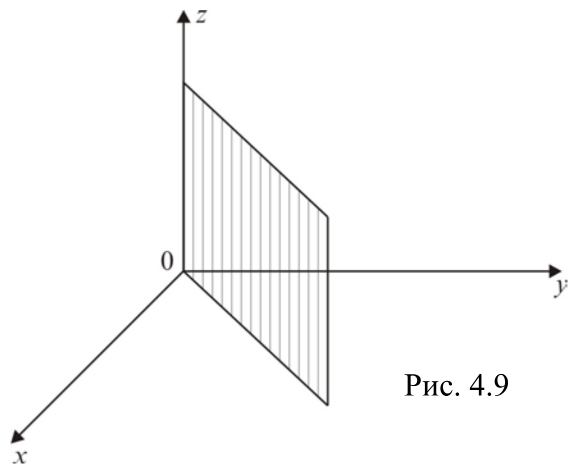


Рис. 4.9

Задача 7. Какой поверхностью изображается уравнение

$$x - y = 0?$$

Р е ш е н и е. Можно сказать, что это – цилиндрическая поверхность с прямой линией в качестве направляющей, т.е. плоскость (Рис 4.9). Итак, когда мы говорим, что уравнение, не содержащее одной координаты, изображается цилиндрической поверхностью, то следует помнить, что в частном случае эта цилиндрическая поверхность может оказаться плоскостью (именно в том случае, когда уравнение – первой степени).

Рассмотрим уравнение, не содержащее двух координат, например

$$\Phi(z) = 0. \tag{4.17}$$

Из этого уравнения можно определить значение $\boldsymbol{z}$, т.е. привести его к виду

$$z = c(c = const)$$

Рассматривая уравнение (4.17) как уравнение с тремя переменными, можно сказать, что ему удовлетворяет всякая тройка чисел ***x, y, z,*** в которой ***z***=***c***, а ***x*** и ***y*** – какие угодно. Значит, поверхность (4.17) состоит из всех точек, у которых z=c, а ***x*** и ***y*** какие угодно. Разумеется, эти точки образуют плоскость, параллельную плоскости XY и отсекающую на оси Z отрезок, равный c.

Если c=0, то эта плоскость совпадает с плоскостью XY. Значит уравнение плоскости XY такое:

$$Z = 0.$$

Аналогично, уравнение $x = a$ $(a = const)$ есть уравнение плоскости, параллельной плоскости YZ и отсекающей на оси X отрезок a, а уравнение $y = b$ есть уравнение плоскости, параллельной плоскости ZX и отсекающей на оси Y отрезок b (Рис. 4.10).

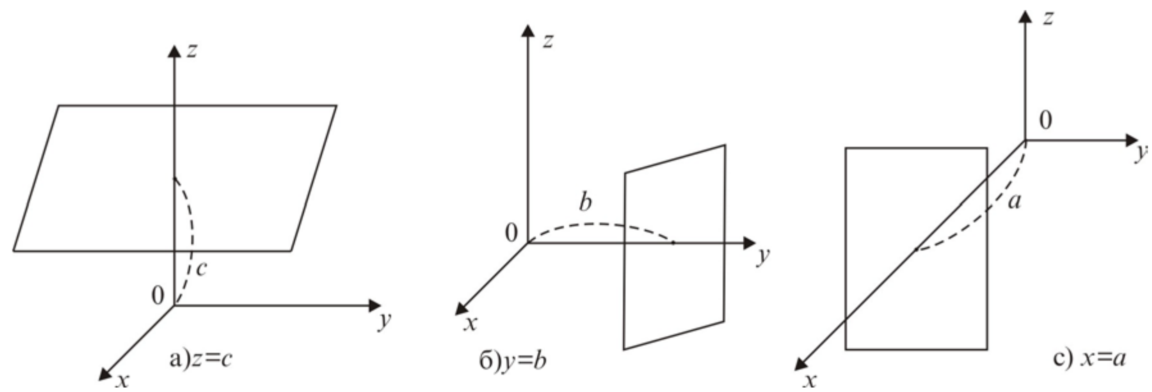


Рис. 4.10

3. Уравнения линии в пространстве. Линию в пространстве можно рассматривать как линию пересечения двух поверхностей, т.е. как геометрическое место точек, общих двум поверхностям.

Пусть $F(x, y, z) = 0$ и $\Phi(x, y, z) = 0$ - уравнения поверхностей, пересекающихся по данной линии L. Тогда координаты каждой точки линии L удовлетворяют обоим уравнениям.

Наоборот, каждая точка, координаты которой удовлетворяют обоим уравнениям, лежит на линии пересечения этих поверхностей.

Пару уравнений

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ \Phi(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

будем называть *уравнениями линии L в пространстве***.**

Итак, два уравнения изображаются в пространстве линией.

Уравнения линии суть два уравнения с тремя переменными, которым удовлетворяют координаты всех точек данной линии и притом только этих точек (т.е. координаты точек, не принадлежащих данной линии, не удовлетворяют обоим уравнениям одновременно, хотя могут иногда удовлетворять одному из них).

Линия, изображающая уравнение, есть линия пересечения поверхностей, изображающих каждое из этих двух уравнений в отдельности.

Задача 8. Каков геометрический смысл пары уравнений?

$$\left.\begin{aligned} &x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ &z = 4. \end{aligned}\right\} \tag{4.18}$$

*Р е ш е н и е***.** Первое из уравнений (4.18) есть уравнение сферы с центром в начале координат, радиуса 5, второе – уравнение плоскости, параллельной плоскости XY и отсекающий на оси Z отрезок, равный 4.

Эти две поверхности (сфера и плоскость) пересекаются по окружности. Следовательно, уравнения (4.18) суть уравнения окружности $x^2 + y^2 = 9$; координаты всех точек этой окружности удовлетворяют одновременно обоим уравнениям (4.18). Центр этой окружности находится в точке $C(0,0,4)$, радиус её равен 3, а её плоскость есть плоскость $z = 4$.

Если даны три уравнения с тремя переменными:

$$\left.\begin{aligned} &F(x,y,z)=0,\\ &\Phi(x,y,z)=0,\\ &\psi(x,y,z)=0,\end{aligned}\right\} \tag{4.19}$$

то их, вообще говоря можно решить совместно, т.е. найти определенные значения ***x, y,*** и **z**, удовлетворяющие всем трём уравнениям. Следовательно, в пространстве существует лишь одна точка или несколько отдельных точек, координаты которых удовлетворяют всем трём уравнениям (4.19), т.е. являются точками пересечения этих поверхностей.

4. Параметрические уравнения линий в пространстве. Пусть три координаты ***x, y,*** и ***z*** даны как функции некоторого параметра *t*:

$$\left.\begin{aligned} &x=\varphi(t),\\ &y=\psi(t),\\ &z=\chi(t).\end{aligned}\right\} \tag{4.20}$$

Если придадим параметру *t* определённое значение, то по формулам (4.20) можно вычислить x**,** y**,** и z. Значит, каждому значению параметра *t* соответствует определённая точка в пространстве. Если параметр *t* непрерывно изменяется, то соответствующая точка непрерывно перемещается в пространстве и следовательно, описывает линию.

Представление линий в пространстве параметрическими уравнениями совершенно аналогично параметрическому представлению линий на плоскости. Возникает следующий вопрос: если линия задана параметрическими уравнениями (4.20), то как получить из этих уравнений уравнение линии в обычной форме? Как известно из алгебры, из системы уравнений можно исключить одно переменное; при этом количество уравнений станет на единицу меньше. Таким образом, можно исключить из уравнений (4.20) параметр ***t***, после чего получим два уравнения, содержащие переменные ***x, y, z***.

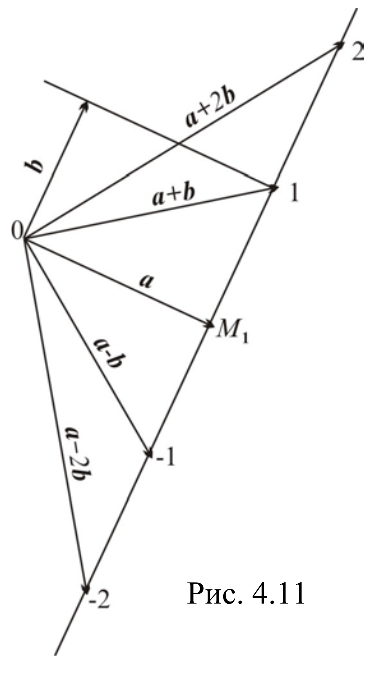


Рис. 4.11

Пример 1. Дана линия

$$\left.\begin{aligned} &x=(t+1)^2,\\ &y=2(t+1),\\ &z=-(2t+1).\end{aligned}\right\} \tag{4.21}$$

Общий способ исключения параметра заключается в следующем: берём из данных трёх уравнений какие-нибудь две пары и в каждой паре производим исключение параметра. В данном случае получим два уравнения:

$$\left.\begin{aligned} y^2 &= 4x, \\ z + y &= 1. \end{aligned}\right\}$$

Теперь видно, что линия (4.21) есть линия пересечения параболического цилиндра с плоскостью.

Пример 2. Дана линия

$$\left.\begin{aligned} x &= 3\sin t, \\ y &= 4\sin t, \\ z &= 5\cos t. \end{aligned}\right\}$$

Нетрудно заметить, что параметр t исключится, если возвести все уравнения в квадрат и сложить. Кроме того, легко исключить t из первых двух уравнений. В результате получится два уравнения:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25,$$

$$4x - 3y = 0,$$

геометрическое истолкование которых очевидно.

5. Векторные уравнения. Положение точки в пространстве вполне определяется задание её радиуса – вектора $\mathbf{r}$. Пусть дано уравнение, содержащее радиус – вектор $\mathbf{r}$. Если это уравнение вполне определяет этот радиус – вектор, то тем самым оно вполне определяет некоторую точку в пространстве. Таково, например, уравнение

$$\mathbf{a} + \mathbf{r} = \mathbf{b}.$$

Если уравнение таково, что существует бесконечное множество векторов, удовлетворяющих ему, то оно определяет некоторое геометрическое место точек в пространстве. Разумеется, мы предполагаем, что полюс выбран и все радиусы – векторы считаются от этого полюса.

Пусть, например, дано уравнение

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} = 0. \tag{4.22}$$

Существует бесконечное множество векторов **r**, удовлетворяющих этому уравнению: все векторы перпендикулярные вектору **a,** так как начало у них общее, то их концы образуют плоскость, перпендикулярную вектору **a** и проходящую через полюс. Векторы не перпендикулярные вектору **a**, не удовлетворяют уравнению. Таким образом, уравнение (4.22) есть уравнение плоскости

Рассмотрим теперь уравнение

$$\mathbf{a} \times \mathbf{r} = \mathbf{0}. \tag{4.23}$$

Этому уравнению удовлетворяет всякий вектор **r**, коллинеарный **a**, и не удовлетворяет не какой вектор **r**, не коллинеарной **a**. Если из полюса выводить все возможные векторы, коллинеарные **a**, то концы этих векторов образуют прямую, проходящую через полюс и параллельную вектору **a**. Уравнение (4.23) есть уравнение этой прямой.

Если радиус – вектор **r** выражен как функция одного параметра t, то мы имеем *векторное параметрическое уравнение линии***.** В самом деле, каждому значению параметра t соответствует определённый радиус – вектор. При непрерывном изменении параметра t конец этого радиус – вектора описывает линию.

Пример 3. Каков геометрический смысл уравнения

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + t \cdot \mathbf{b}? \tag{4.23}$$

Ответ: Уравнение (4.23) изображается прямой, проходящий через точку $M_1(\mathbf{a})$ и параллельной вектору $\mathbf{b}$. Легко построить эту прямую по точкам (Рис. 4. 11).

t	r
-2	$\mathbf{a}-2\mathbf{b}$
-1	$\mathbf{a}-\mathbf{b}$
0	$\mathbf{a}$
1	$\mathbf{a}+\mathbf{b}$
2	$\mathbf{a}+2\mathbf{b}$

Точка M_1 на рис. 4.11 соответствует значению параметра $t=0$.

Пример 4. Найти векторное параметрическое уравнение винтовой линии.

Сделаем прежде всего общее замечание. Если координатные параметрические уравнения какой-нибудь линии суть:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \\ z &= \chi(t), \end{aligned}\right\}$$

то векторное параметрическое уравнение этой линии таково:

$$\mathbf{r} = \varphi(t)\mathbf{i} + \psi(t)\mathbf{j} + \chi(t)\mathbf{k}.$$

Обратно, если радиус вектор $\mathbf{r}$ есть функция параметра t, то его координаты тоже суть функции этого параметра t, которые определяются по формулам:

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \mathbf{ai}, \\ a_y &= \mathbf{aj}, \\ a_z &= \mathbf{ak}. \end{aligned}\right\}$$

Координаты параметрического уравнения винтовой линии таковы:

$$\left.\begin{aligned} x &= R\cos\varphi, \\ y &= R\sin\varphi, \\ z &= \lambda\varphi, \end{aligned}\right\} \quad (\lambda > 0).$$

Векторное параметрическое уравнение винтовой линии имеет вид:

$$\mathbf{r} = R(\mathbf{i}\cos\varphi + \mathbf{j}\sin\varphi + \lambda\varphi\mathbf{k}).$$

§ 4.4. Цилиндрические и сферические координаты

В пространстве обобщением полярных систем координат являются цилиндрические и сферические системы координат. И для тех и для других фигура, относительно которой определяется положение точки, состоит из точки **O**- полюс, луча $\boldsymbol{l} = OX$, исходящего из O и вектора $|\mathbf{n}| = 1$ и перпендикулярного к $\boldsymbol{l}$ через полюса O можем провести плоскость XOY, перпендикулярную вектору $\mathbf{n}$.

В цилиндрических координатах положение произвольной точки $M(x, y, z)$ в пространстве однозначно определяется тройкой чисел (ρ, φ, z), где z аппликата точки M, (ρ, φ) - полярные координаты точки $P(x, y)$, являющиеся проекцией точки M на плоскость XOY (Рис. 4.12а).

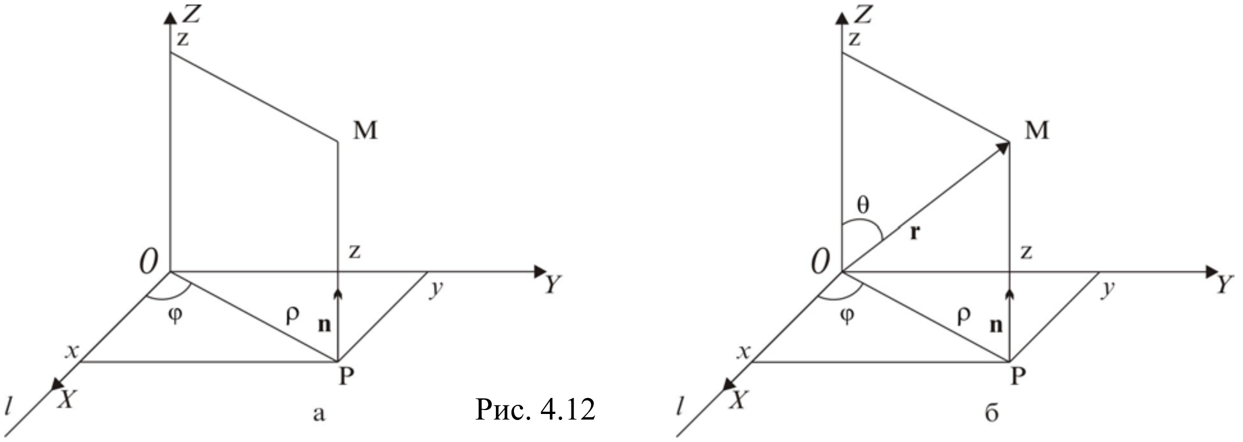


Рис. 4.12

Если полярная ось совпадает с положительным направление оси OX, то формулы:

$$\begin{aligned} &x = \rho\cos\varphi; \quad y = \rho\sin\varphi; z = z; \\ &0 \le \varphi \le 2\pi; \quad 0 \le \rho \le +\infty; \quad |z| < \infty \end{aligned} \tag{4.24}$$

устанавливают связь между декартовыми и цилиндрическими координатами точки M.

Соответствующие семейства координатных поверхностей здесь будут: 1) $\rho = \rho_0$ $(\rho_0 = const)$ - круговые цилиндры $x^2 + y^2 = \rho_0^2$, образующие которых параллельны оси OZ; 2) $\varphi = \varphi_0 (\varphi_0 = const)$ - всевозможные полуплоскости, проходящие через ось OZ; 3) $z = z_0$ - плоскости параллельные плоскости XOY.

Соответствие, определяемое формулами (4.24) переводят область T' пространства $\rho\varphi z$ во все пространство XYZ и будет взаимно однозначным в любой области, не содержащей точек оси OZ.

Пусть XYZ - декартова прямоугольная система координат в пространстве $\mathbf{R}^3$ и $M(x, y, z)$ - произвольная точка из $\mathbf{R}^3$. Обозначаем через $r-$расстояние от начала координат до точки $M(r \ge 0)$, а через θ - угол между осью OZ и вектором **OM**, отсчитываемый от оси OZ $(0 \le \theta \le \pi)$. Пусть P – проекция точки M на плоскость XOY, а φ - угол между осью OX и вектором **OP**, отсчитываемый от оси OX (Рис. 4.12 б). Тогда декартовы координаты x, y, z точки M выражаются через r, θ, φ следующим образом:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \qquad 0 \le r < +\infty, \;\; 0 \le \varphi \le 2\pi, \;\; 0 \le \theta \le \pi. \\ z = r\cos\theta, \end{cases} \tag{4.25}$$

Числа r, θ и φ называются *сферическими координатами* точки M, а система уравнение (4.25) преобразует сферические координаты точки в пространстве в декартовы.

Здесь семейства координатных поверхностей будут:

1) $r = r_0$ - сферы $x^2 + y^2 + z^2 = r_0^2$ **(**$0 \le r_0 < +\infty$**);**

2) $\varphi = \varphi_0$ -полуконусы $x^2 + y^2 = z^2 tg^2 \varphi_0$ $(0 \le \varphi_0 \le \pi;\ \varphi_0 \ne \frac{\pi}{2})$; при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ они вырождаются в плоскость $z = 0$, а при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ «стягиваются» в положительный (отрицательный) луч оси $0Z$; 3) $\theta = \theta_0$ - полуплоскости $y = xtg\theta_0$ $(0 \le \theta_0 < 2\pi;\ \theta_0 \ne \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, проходящие через ось OZ, вместе с полуплоскостями $x = 0,\ y \ge 0$ и $x = 0,\ y < 0$.

При отображении (4.25) имеем нарушение взаимно однозначного соответствия для точек оси $0Z$.

Глава V

Плоскость

§ 5.1. Нормальное уравнение плоскости

В пространстве XYZ возьмём некоторую плоскость P. Через начало координат проведём прямую (нормаль), перпендикулярную плоскости P. Установим на этой прямой направление от начало координат O в сторону плоскости P. Пусть K- точка пересечения этой прямой с плоскостью P (Рис.5.1).

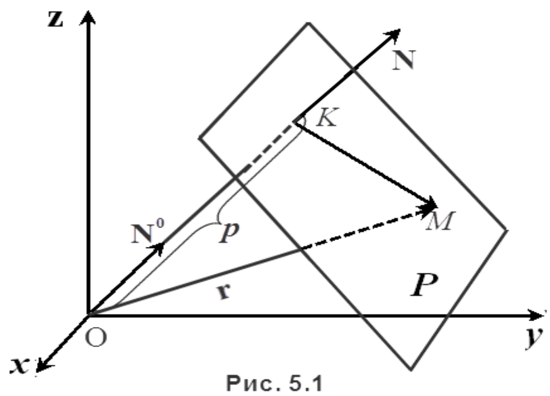


Рис. 5.1

Пусть p расстояние плоскости P от начало координат, а α, β, γ углы, составляемые с осями координат нормальным вектором $\boldsymbol{N}$ плоскости, направленным от начале координат к плоскости. Затем возьмём на плоскости P произвольную (текущую) точку $M(x, y, z)$ и соединим её с началом координат. Пусть $\boldsymbol{N^0}$-единичный вектор направления $\boldsymbol{N}$. При этом

$$\boldsymbol{N^0} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}, \qquad p = OK,$$

а радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ точки M будет иметь своими координатами числа x, y, z:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{OM} = \{x, y, z\}.$$

Составим уравнение плоскости по этим данным. Спроектируем вектор $\boldsymbol{r}$ на вектор $\boldsymbol{N}$. Очевидно, что

$$\text{пр}_N \boldsymbol{r} = p. \tag{5.1}$$

Равенство (5.1) будет выполняться для всех точек, лежащих на плоскости P и только для таких точек; оно нарушается, если точка M лежит вне плоскости. Следовательно, оно является уравнением плоскости P. Так как

$$(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{N^0}) = |\boldsymbol{N^0}| \cdot |\boldsymbol{r}| \cdot \cos(\widehat{\boldsymbol{N^0}, \boldsymbol{r}}) = |\boldsymbol{N^0}| \text{пр}_{N^0} \boldsymbol{r} = \text{пр}_{N^0} \boldsymbol{r},$$

то уравнение плоскости P можно записать в виде:

$$(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{N^0}) = p$$

или

$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{N^0} - p = 0. \tag{5.2}$$

Уравнение (5.2) выражает собой условие, при котором точка $M(\boldsymbol{r})$ лежит на данной плоскости, и называется *нормальным уравнением плоскости в векторной форме.* Радиус вектор $\boldsymbol{r}$ произвольной точки M плоскости называется *текущим радиусом – вектором*. Зная координаты векторов $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{N^0}$

и выражение для скалярного произведения, можно записать уравнение (5.2) в координатной форме:

$$x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta + z \cdot \cos\gamma - p = 0. \qquad (5.3)$$

Уравнение (5.3) называется *нормальным уравнением плоскости в координатной форме.* Полученное уравнение (5.3) первой степени относительно $x, y, z,$ т. е. *всякая плоскость может быть представлена уравнением первой степени относительно текущих координат.*

Если плоскость P проходит через начало координат, т. е. значение $p = 0,$ то уравнение плоскости запишется в виде: $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{N^0}) = 0,$ т.е.

$$x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta + z \cdot \cos\gamma = 0.$$

В этом случае за $\boldsymbol{N^0}$ можно принять любой из двух единичных векторов, перпендикулярных к плоскости и отличающихся один от другого направлением.

Пусть точка K имеет координаты $\{x_0, y_0, z_0\}$ и вектор $\boldsymbol{N}$- координаты $\{A, B, C\}$. Тогда вектор $\boldsymbol{KM}$ имеет координаты $\{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$ и условие $\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{KM} = 0$ в координатной форме напишется так:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (5.4)$$

Уравнение (5.4) и есть уравнение плоскости P, проходящей через точку $K(x_0, y_0, z_0)$ и перпендикулярной к вектору $\boldsymbol{N}\{A, B, C\}$.

При всевозможных A, B, C уравнение (5.4) определит совокупность всех плоскостей, проходящих через точку $K(x_0, y_0, z_0)$ и поэтому называется *уравнением связки плоскостей,* проходящих через данную точку K. Коэффициенты A, B, C называются направляющими коэффициентами плоскости P.

Задача 1. Даны точки $M_1(-1;6;3)$ и $M_2(3;-2;-5)$. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 и перпендикулярной к вектору M_1M_2.

Р е ш е н и е. Уравнение связки плоскостей, проходящих через точку M_1 будет

$$A(x+1) + B(y-6) + C(z-3) = 0.$$

Нормальный вектор искомой плоскости $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{M_1M_2}$ имеет координаты $\{4;-8;-8\}$. Подставив их на место A, B и C в уравнение связки, получим:

$$4(x+1) - 8(y-6) - 8(z-3) = 0$$

или

$$x - 2y - 2z + 19 = 0.$$

Это и есть уравнение искомой плоскости.

§ 5.2. Общее уравнение плоскости

Теорема 1. *Всякому уравнению первой степени*

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{5.5}$$

(в котором хоть одно из чисел A, B, C *отлично от нуля) соответствует плоскость.*

Доказательство. В самом деле, возьмём любую тройку чисел (x_0, y_0, z_0), удовлетворяющую уравнению (5.5). Тогда будет

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0,$$

откуда $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$ и уравнение (5.5) можно переписать в виде:

$$Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0,$$

или

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

а это уравнение вида (5.4) и ему действительно, соответствует плоскость.

Уравнение (5.5) всегда можно привести к нормальному виду, умножив его на постоянный множитель M, подобрав его так, чтобы получилась нормальное уравнение, т. е. уравнение вида (5.3). Уравнение (5.5) преобразуется к виду:

$$MAx + MBy + MCz + MD = 0. \tag{5.6}$$

Чтобы уравнение (5.6) было вида, одинакового с уравнением (5.3), нужно положить

$$MA = \cos\alpha, MB = \cos\beta, MC = \cos\gamma, MD = -p. \tag{5.7}$$

Из равенств (5.7) легко найдём неизвестные M, α, β, γ и p выраженными через известные коэффициенты A, B, C, D, если воспользуемся вспомогательным равенством:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Действительно, возводя в квадрат первые три из равенств (5.7) и складывая, найдём:

$$M^2A^2 + M^2B^2 + M^2C^2 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

или

$$M^2(A^2 + B^2 + C^2) = 1,$$

откуда

$$M = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{5.8}$$

В формуле (5.8) нужно брать знак, противоположный знаку свободного члена, как это видно из последнего равенства (5.7). Подставив найденное значение M в равенства (5,7), получим формулы для $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ и p, т.е.

$$\cos\alpha = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos\beta = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos\gamma = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad p = \mp\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (5,9)$$

В этих формулах (5,9) надо брать верхние знаки, если $D<0$ $(M>0)$, и нижние в противном случае. Множитель M носит название *нормирующего множителя.*

Замечание 5.1. Формальные признаки нормального координатного уравнения плоскости следующие: 1) сумма квадратов коэффициентов при текущих координатах равна единице, 2) свободный член отрицателен.

Задача 2. Уравнения плоскости *2x-9y+6z-22=0* привести к нормальному виду.

Р е ш е н и е. Нормирующий множитель будет:

$$M = +\frac{1}{\sqrt{2^2+(-9)^2+6^2}} = \frac{1}{\sqrt{121}} = \frac{1}{11};$$

умножая на него данное уравнение получим:

$$\frac{2}{11}x - \frac{9}{11}y + \frac{6}{11}z - 2 = 0$$

Для данной плоскости, имеем:

$$\cos\alpha = \frac{2}{11}, \cos\beta = -\frac{9}{11}, \cos\gamma = \frac{6}{11}, \rho = 2.$$

§ 5.3. Исследование общего уравнения плоскости

Рассмотрим некоторые частные случаи уравнения плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (5.10)$$

1. Пусть $D = 0$. Тогда уравнение (5.10) имеет вид:

$$Ax + By + Cz = 0 \qquad (5.11)$$

и определяет плоскость, проходящую через начало координат, так как координаты точки $(0,0,0)$ обращают уравнение (5.11) в тождество.

2. Пусть *C=0*. Уравнение (5.10) имеет тогда вид:

$$Ax + By + D = 0. \qquad (5.12)$$

Нормальный вектор этой плоскости $\boldsymbol{N}\{A,B,C\}$ имеет проекцию C на ось OZ, равную 0. Поэтому $\boldsymbol{N} \perp \boldsymbol{OZ}$, а плоскость параллельна оси OZ.

Пусть прямая EF есть след плоскости P на плоскости OXY (Рис. 5.2). Так как прямая EF лежит на плоскости P, то координаты x и y любой её точки удовлетворяют уравнению (5.12). Следовательно, уравнение (5.12) есть также уравнение прямой EF в плоскости XOY.

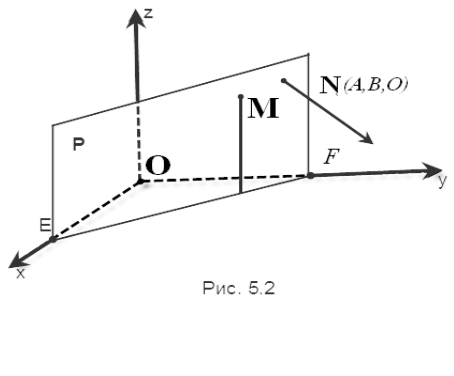


Рис. 5.2

Итак, *уравнение* $Ax + By + D = 0$ *не содержащее* z, *определяет в пространстве плоскость, параллельную оси* OZ, след которой на плоскости XOY имеет в этой плоскости то же уравнение $Ax + By + D = 0$.

3. Пусть $C = 0$ и $D = 0$. Тогда уравнение (5.10) имеет вид:

$$Ax + By = 0. \tag{5.13}$$

По предыдущему эта плоскость должна быть параллельна оси OZ и в тоже время проходить через точку O этой оси. Следовательно, она проходит через ось OZ .

4. Пусть $B = 0$ и $C = 0$. Уравнение (5.10) имеет вид:

$$Ax + D = 0 \quad \text{или} \quad x = -\frac{D}{A} = a$$

и определяет плоскость, параллельную и оси OZ и оси OY, т.е. параллельную плоскости YOZ.

Все остальные особые случаи обращения в 0 одного или двух коэффициентов уравнения (5.10) будут аналогичны уже рассмотренным.

5. Пусть теперь в уравнении (5.10) три коэффициента – или B, C, D, или A, C, D, или A, B, D- равны 0. Получим уравнения координатных плоскостей;

$Ax = 0$, или $x = 0$ -уравнение плоскости YOZ;

$By = 0$, или $y = 0$ -уравнение плоскости XOZ;

$Cz = 0$, или $z = 0$- уравнение плоскости XOY.

Случай $A = B = C = 0$ геометрического смысла не имеет.

Примеры. Построить плоскости:

1). $x + 2y - z = 0.$ Плоскость проходит через начало координат. Для построения плоскости найдём уравнения её следов на двух координатных плоскостях:

а) След на плоскости YOZ $(x = 0:)$ $z = 2y$ прямая OM;

б) След на плоскости XOZ $(y = 0)$: $z = x -$ биссектриса ON угла XOZ (Рис.5.3).

2) $2x + z - 6 = 0.$ Плоскость параллельна оси OY. Её след MN (Рис. 5.4) на плоскости XOZ имеет, те же уравнение $2x + z - 6 = 0.$ Точку M оси OX найдём,

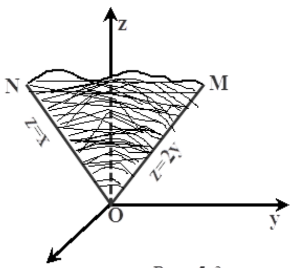


Рис. 5.3

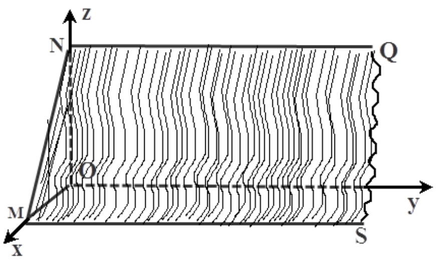


Рис.5.4

положив в этом уравнении $z = 0,$ что даст $x = OM = 3$; При $x = 0,$ имеем $z = 6,$ проведя прямые $MN, NQ // OY$ и $MS // OY -$ получим следы данной плоскости на координатных плоскостях.

3) $2z-5=0$ – плоскость параллельна плоскости XOY и пересекает ось OZ при $z=\frac{5}{2}$. (Рис.5.5).

§ 5.4. Уравнение плоскости в отрезках

Пусть дана плоскость

$$Ax+By+Cz+D=0, \tag{5.14}$$

где ни один из коэффициентов A, B, C, D не равен нулю, т.е. плоскость (5.14) не параллельна ни одной из осей координат. Требуется вычислить отрезки, отсекаемые этой плоскостью на осях координат.

Очевидно, чтобы вычислить отрезок, отсекаемый плоскостью на оси OX, надо положить в уравнении (5.14) $y=z=0$ и определить из этого уравнения x; это и будет искомый отрезок. Обозначая его через a, будем иметь

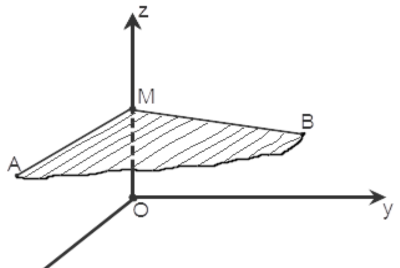


Рис. 5.5

$$a=-\frac{D}{A}.$$

Аналогично найдём отрезки b и c, отсекаемые плоскостью (5.14) соответственно на осях OY и OZ. Итак

$$a=-\frac{D}{A},\ b=-\frac{D}{B},\ c=-\frac{D}{C}. \tag{5.15}$$

Преобразованное уравнение (5.14) будет иметь вид:

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{z}{-\frac{D}{C}}=1,$$

или, принимая во внимание равенстве (5.15), получим:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \tag{5.16}$$

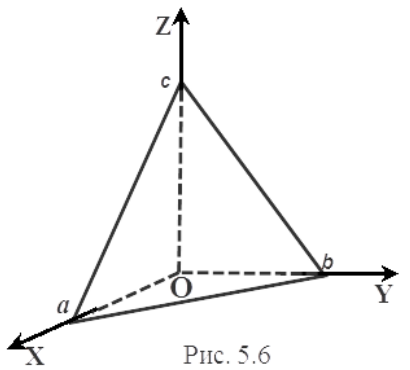


Рис. 5.6

Уравнение (5.16) называется *уравнением плоскости в отрезках.* Признаки этого вида уравнения таковы: свободный член находится в правой части и равен единице, коэффициенты при x, y и z отнесены в знаменатели; в частности, знак минус, если он имеется перед каким-нибудь членом, относится к знаменателю. Уравнение (5.16) полезно для построения плоскости на чертеже (Рис. 5.6).

Пример. Привести уравнение плоскости $2x+3y-z+12=0$ к виду уравнения в отрезках.

Р е ш е н и е. Переносим свободный член вправо и делим уравнение на -12:

$$2x+3y-z=-12,$$

$$\frac{2x}{-12}+\frac{3y}{-12}-\frac{z}{-12}=1,$$

$$\frac{x}{-6}+\frac{3y}{-4}+\frac{z}{12}=1.$$

Полученное уравнение и есть уравнение в отрезках.

§ 5.5. Основные задачи на плоскости

1.Угол между двумя плоскостями. Условия их параллельности и перпендикулярности. Если две плоскости заданы векторными уравнениями:

$$\boldsymbol{r}\boldsymbol{N_1}+D_1=0,$$

$$\boldsymbol{r}\boldsymbol{N_2}+D_2=0,$$

то $\boldsymbol{N_1}$ есть вектор, нормальный к первой плоскости, а $\boldsymbol{N_2}$-вектор, нормальный ко второй плоскости. Косинус угла между этими векторами [этот угол равен углу между самими плоскостями или дополняет его до 180^0 (Рис. 5.7)] определяется по формуле

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{N_1},\boldsymbol{N_2}})=\frac{\boldsymbol{N_1}\cdot\boldsymbol{N_2}}{|\boldsymbol{N_1}|\cdot|\boldsymbol{N_2}|},\quad (\widehat{N_1,N_2})=\varphi. \tag{5.17}$$

Это формула может дать для либо знак плюс, либо минус, причём это зависит не от данных плоскостей, а от того, как поставлены стрелки на нормальных векторах.

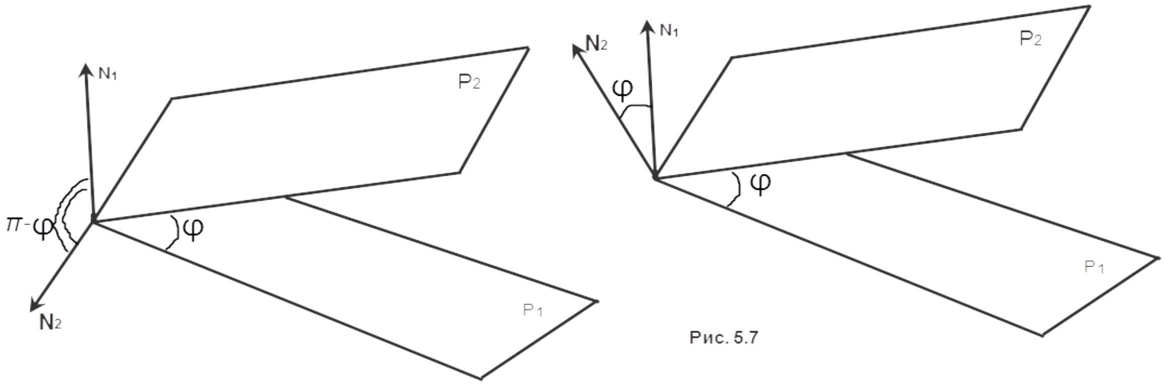


Рис. 5.7

Для устранения этого обстоятельства напишем формулу (5.17) в таком виде:

$$\cos\varphi=\left|\frac{N_1\cdot N_2}{|N_1|\cdot|N_2|}\right|, \tag{5.18}$$

т.е. условимся для $\cos\varphi$ брать всегда положительное значение. Таким образом, мы всегда будем находить *острый* угол между плоскостями.

Если плоскости взаимно перпендикулярны, то и их нормальные векторы взаимно перпендикулярны, следовательно,

$$\boldsymbol{N_1}\cdot\boldsymbol{N_2}=0. \tag{5.19}$$

Если плоскости взаимно параллельны, то их нормальные векторы коллинеарны, т.е.

$$\boldsymbol{N_1}=\lambda\boldsymbol{N_2}, \tag{5.20}$$

или

$$\boldsymbol{N_1} \times \boldsymbol{N_2} = \boldsymbol{0}. \qquad (5.21)$$

От полученных векторных формул легко перейти к координатным формулам. Пусть уравнение двух плоскостей даны в координатной форме:

$$\left.\begin{array}{l} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0. \end{array}\right\}$$

В таком случае векторы:

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{N_1} = A_1 \boldsymbol{i} + B_1 \boldsymbol{j} + C_1 \boldsymbol{k}, \\ \boldsymbol{N_2} = A_2 \boldsymbol{i} + B_2 \boldsymbol{j} + C_2 \boldsymbol{k}, \end{array}\right\}$$

являются нормальными векторами соответственно к первой и второй плоскостям. Подставляя эти выражения для векторов $\boldsymbol{N_1}$ и $\boldsymbol{N_2}$ в формулу (5.18), получим:

$$\cos\varphi = \left| \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \right|.$$

Условия перпендикулярности двух плоскостей, выражаемое формулой (5.19), в координатной форме запишется так:

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0, \qquad (5.22)$$

т.е. *для взаимной перпендикулярности двух плоскостей нужно, чтобы сумма парных произведений их направляющих коэффициентов равнялась нулю.*

Формула (5.20) [или (5.21)], выражающая условие параллельности двух плоскостей, в координатной форме запишется так:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}, \qquad (5.23)$$

т.е. *для параллельности двух плоскостей нужно, чтобы тройка направляющих коэффициентов одной из них была пропорциональна тройке направляющих коэффициентов другой.*

Задача 3. Вычислить углы между следующими плоскостями:

$$а)\ 3x - y + 2z + 15 = 0 \ \text{ и } \ 5x + 9y - 3z - 1 = 0,$$

$$б)\ 6x + 2y - 4z + 17 = 0 \ \text{ и } \ 9x + 3y - 6z - 4 = 0.$$

Р е ш е н и е. а) $\cos\varphi = \dfrac{3 \cdot 5 + (-1) \cdot 9 + 2 \cdot (-3)}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{5^2 + 9^2 + (-3)^2}} = \dfrac{15 - 9 - 6}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{85}} = 0,$

$\cos\varphi = 0,$ откуда $\varphi = 90^0$, т.е. данные плоскости перпендикулярны между собой. При этом выполняется условие (5.22), т.е. $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0.$

б) $\cos\varphi = \dfrac{6 \cdot 9 + 2 \cdot 3 + (-4) \cdot (-6)}{\sqrt{6^2 + 2^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{9^2 + 3^2 + (-6)^2}} = \dfrac{84}{\sqrt{56} \cdot \sqrt{126}} = \dfrac{84}{\sqrt{7056}} = \dfrac{84}{84} = 1,$

т.е. $\cos\varphi = 1,$ и $\varphi = 0^0$. Таким образом, плоскости являются параллельными. При этом выполняется условие

$$\frac{6}{9} = \frac{2}{3} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}.$$

2. Плоскость, проходящая через три данные точки. Рассмотрим задачу: провести плоскость через три данные точки

$$M_1(\boldsymbol{r}_1),\ M_2(\boldsymbol{r}_2),\ M_3(\boldsymbol{r}_3).$$

Мы сумеем написать уравнение плоскости, если будем знать: 1) какую-нибудь точку этой плоскости, 2) нормальный вектор. Точки нам известны, а нормальный вектор можно определить следующим образом. Векторы

$$\boldsymbol{M_1M_2} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1,$$

$$\boldsymbol{M_1M_3} = \boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1,$$

лежат в одной плоскости. Следовательно, их векторное произведение

$$\boldsymbol{N} = (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) \times (\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1)$$

является вектором, нормальным к плоскости. Вектор $\boldsymbol{M_1M} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}$ также лежит в одной плоскости, где $M(\boldsymbol{r})$ произвольная (текущая) точка, лежащая в этой плоскости и, следовательно, перпендикулярен к $\boldsymbol{N}$, т.е.

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1)\{(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) \times (\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1)\} = 0. \qquad (5.24)$$

Данное равенство является смешанным произведением и оно означает, что все три вектора $\boldsymbol{M_1M}$, $\boldsymbol{M_1M_2}$ и $\boldsymbol{M_1M_3}$ компланарны, т.е. имеет место равенство (5.24), которое и является уравнением плоскости, проходящей через три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$.

В координатной форме уравнение (5.24) перепишется так:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (5.25)$$

Условие (5.25) также можно записать и в следующей форме:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (5.26)$$

Если четыре точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ и $M_4(x_4, y_4, z_4)$ лежат в одной плоскости, то между их координатами существует следующее соотношение:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (5.27)$$

Если эти четыре точки не лежат в одной плоскости, то объём тетраэдра, вершинами которого они служат, вычисляется по формуле:

$$V=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1\\ x_4 & y_4 & z_4 & 1\end{vmatrix}, \tag{5.28}$$

причём знак в правой части выбирается так, чтобы результат получился неотрицательным $(V\geq 0)$.

Задача 4. Написать уравнение плоскости, проходящей через начало координат и через две точки $A(3;-2;1)$ и $B(1;4;0)$.

Р е ш е н и е. Пусть произвольная точка $M(x;y;z)$ лежит на искомой плоскости. Для этого необходимо и достаточно, чтобы векторы $\mathbf{OM}, \mathbf{OA}$ и $\mathbf{OB}$ были компланарны, т.е.

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0\\ 3 & -2 & 1\\ 1 & 4 & 0\end{vmatrix}=0.$$

Раскрыв определитель по элементам первой строки, получим:

$$4x-y-14z=0.$$

Задача 5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1,1,8)$, $M_2(2,-5,0)$, $M_3(4,7,1)$.

Р е ш е н и е. Уравнение плоскости, проходящей через первую из данных точек, будет:

$$A(x-1)+B(y-1)+C(z-8)=0. \tag{*}$$

Условия прохождения плоскости (*) через две другие точки и первую точку суть:

$$1\cdot A-6B-8C=0,\;\; 3A+6B-7C=0.$$

Складывая второе уравнение с первым найдем:

$$4A-15C=0, \text{ или } \frac{A}{C}=\frac{15}{4}.$$

Подставляя во второе уравнение

$$3\frac{A}{C}+6\frac{B}{C}-7=0,$$

получим:

$$\frac{B}{C}=-\frac{17}{24}.$$

Подставляя в уравнение (*) вместо $\frac{A}{C}$ и $\frac{B}{C}$ их значения, получим

$$\frac{A}{C}(x-1)+\frac{B}{C}(y-1)+z-8=0,$$

или

$$\frac{15}{4}(x-1)-\frac{17}{24}(y-1)+z-8=0.$$

Откуда получим:

$$90x+17y+24z-265=0.$$

Задача 6. Составить уравнение плоскости:

1). Проходящей через точку $M(-2,7,3)$ параллельно плоскости $x-4y+5z-1=0.$

2). Проходящей через начало координат и перпендикулярной к двум плоскостям: $2x-y+5z+3=0$ и $x+3y-z-7=0.$

Р е ш е н и е. 1) Напишем уравнение произвольной плоскости, проходящей через данную точку:

$$A(x+2)+B(y-7)+C(z-3)=0. \qquad (**)$$

Чтобы эта плоскость была параллельна данной плоскости, нужно выполнить условие

$$\frac{A}{1}=\frac{B}{-4}=\frac{C}{5}.$$

Приравнивая каждое из данной пропорции параметру t, будем иметь:

$$A=t, B=-4t, C=5t.$$

Подставив эти значения $A,B,$ и C в уравнении (**), найдем уравнение искомой плоскости

$$1\cdot(x+2)-4\cdot(y-7)+5\cdot(z-3)=0,$$

или

$$x-4y+5z+15=0.$$

2). Нормальные векторы $\boldsymbol{N_1}\{2;-1;5\}$, и $\boldsymbol{N_2}\{1;3;-1\}$ данных плоскостей можно расположить в искомой плоскости. Пусть точка $M(x,y,z)$ лежит на искомой плоскости. Для этого векторы $\boldsymbol{OM},$ $\boldsymbol{N_1}$ и $\boldsymbol{N_2}$ должны быть компланарны или чтобы

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}=0 \; .$$

Отсюда уравнение искомой плоскости будет

$$2x-y-z=0.$$

3. Точка пересечения трёх плоскостей. Чтобы найти точку пересечения трёх плоскостей, нужно решить совместно систему трёх уравнений этих плоскостей:

$$\left.\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z+D_1&=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2&=0,\\ A_3x+B_3y+C_3z+D_3&=0. \end{aligned}\right\} \qquad (5.29)$$

Координаты x,y и z точки пересечения должны одновременно удовлетворять уравнениям всех трёх плоскостей.

Полное решение этой задачи в общем виде может быть дано при помощи определителей. Пусть определитель этой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда, как известно из теории определителей, найдётся единственная точка пересечения плоскостей (5.29) по формулам Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \ \ y = \frac{\Delta_y}{\Delta}; \ \ z = \frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

Пусть определитель Δ равен нулю, но по крайней мере один из его миноров отличен от нуля. Тогда плоскости (5.29) либо не имеют общей точки, либо пересекаются в бесконечном множество точек. В первом случае среди определителей 3-го порядка в матрице

$$K = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}$$

есть по крайней мере один, отличный от нуля, и тогда одна из плоскостей параллельна линии пересечения двух других. В этом случае нет общей точки пересечения всех трёх плоскостей. Система (5.29) несовместна. Во втором случае все определители 3-го порядка матрицы K равны нулю и все три плоскости проходят через одну прямую. В этом случае существует бесчисленное множество плоскостей. Система (5.29) *неопределенна.*

Если, наконец, вместе с определителем Δ все его миноры равны нулю, то три плоскости либо не имеют общей точки, либо пересекаются в бесконечном множестве точек. В первом случае среди миноров 2-го порядка в матрице K есть хоть один отличный от нуля. И тогда все три плоскости параллельны между собой. Во втором случае все миноры 2-го порядка матрицы K равны нулю и три плоскости совпадают.

Задача 7. Найти точку пересечения плоскостей:

1) $2x + 3y - z = 5; \ x + y + 2z = 7; \ 2x - y + z = 1,$

2) $x + y + z = 5; \ x - y + z = 1; \ x + z = 2,$

3) $x + y + z = 5; \ x - y + z = 1; \ x + z = 3,$

4) $2x + y + z = 4; \ 4x + 2y + 2z = 5; \ 6x + 3y + 3z = 10,$

5) $2x + y + z = 4; \ 4x + 2y + 2z = 8; \ 6x + 3y + 3z = 12,$

Р е ш е н и е. 1). Здесь определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 18.$$

Значит, $\Delta \neq 0,$ и все его миноры также отличны от нуля. Решив эти уравнения совместно, получим координаты искомой точки:

$$x = \frac{4}{9}; \ \ y = \frac{19}{9}; \ \ z = \frac{20}{9}.$$

2). Определитель данной системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

но среды его миноров 2-го порядка есть отличный от нуля, например $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2.$ Среди миноров 3-го порядка матрицы

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

имеется определитель, отличный от нуля, например:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2.$$

Следовательно, данная система не имеет решения, и тогда одна из плоскостей параллельна линии пересечения двух других, т.е. не имеют общую точку пересечения.

3). Определитель Δ системы тот же, что и в предыдущем примере, т.е. $\Delta = 0$, но среди его миноров 2-го порядка есть отличный от нуля. Миноры 3-го порядка матрицы

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

все равны нулю. Следовательно, данная система имеет бесчисленное множество решений, например:

$$x + z = 3,\ y = 2 \text{ или } x = 3 - z,\ y = 2,$$

где z - произвольно. При этом случае три плоскости проходят через одну прямую, т.е. имеют бесконечно много общих точек.

4). Определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 6 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Все его миноры тоже равны нулю. Среди миноров 2-го порядка матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 5 \\ 6 & 3 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

есть отличный то нуля. например $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -3$. Данная система уравнений не совместна, следовательно, три плоскости параллельны между собой, т.е. не имеют общей точки.

5). Определитель системы тот же, что и в предыдущем примере 4). Значит, $\Delta = 0$ и все его миноры тоже равны нулю. Миноры 2-го порядка матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 8 \\ 6 & 3 & 3 & 12 \end{pmatrix}$$

все равны нулю. Данная система уравнений приводится к одному уравнению. Решая первое уравнение данной системы, находим:

$$z = 4 - 2x - y,$$

где x и y произвольны. Следовательно, эти три плоскости пересекаются в бесконечном множестве точек, т.е. они совпадают.

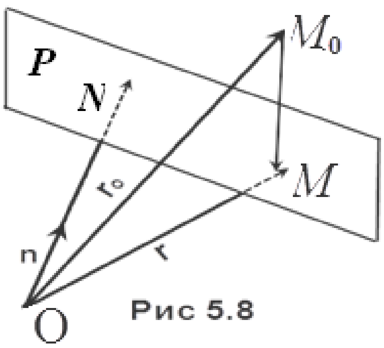


Рис 5.8

§ 5.6. Расстояние от точки до плоскости

Пусть требуется найти расстояние от данной точки $M_0(r_0)$ до плоскости P, заданной нормальным векторным уравнением

$$\boldsymbol{rn^0} - p = 0, \qquad (5.30)$$

где $\boldsymbol{n^0} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, $\boldsymbol{r} = \{x, y, z\}$ и точка M_0 с радиус – вектором $\boldsymbol{r_0} = \{x_0, y_0, z_0\}$,

Требуется определить расстояние от точки M_0 до плоскости P (Рис. 5.8).

Условимся называть отклонением данной точки M_0 от данной плоскости P число d, равное длине перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость, взятой со знаком плюс, если точка и начало координат лежат по разные стороны от данной плоскости, и со знаком минус, если они лежат по одну сторону от плоскости. Для точек, лежащих на плоскости, отклонение равно нулю. Ясно, что расстояние от точки до плоскости равно абсолютной величине отклонения.

Будем рассматривать случай, когда точка M_0 и начало координат O лежат по разные стороны от плоскости P.

Проведём вектор $\boldsymbol{OM}$, перпендикулярный плоскости, опустим перпендикуляр $\boldsymbol{M_0M}$ из точки M_0 на плоскость P и введём ещё два вектора $\boldsymbol{M_0M}$ и $\boldsymbol{OM}$.

Вектор $\boldsymbol{OM}$ можно рассматривать как сумму двух векторов:

$$\boldsymbol{OM} = \boldsymbol{OM}_0 + \boldsymbol{M}_0\boldsymbol{M}.$$

Обозначив $|\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{M}| = d$, и замечая, что вектор $\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{M}$ коллинеарен единичному вектору $\boldsymbol{n}^0$, но противоположен ему по направлению, можем написать:

$$\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{M} = -\boldsymbol{n}^0 \cdot d,$$

тогда

$$\boldsymbol{OM} = \boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{n}^0 \cdot d.$$

Так как $\boldsymbol{OM}$ есть радиус-вектор точки M, лежащей на плоскости, то можно в уравнение плоскости (5.30) вместо текущего вектора $\boldsymbol{r}$ подставить вектор $\boldsymbol{OM}$:

$$(\boldsymbol{n}^0, \boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{n}^0 \cdot d) - p = 0$$

или

$$(\boldsymbol{n}^0, \boldsymbol{r}_0) - d - p = 0,$$

откуда

$$d = (\boldsymbol{n}^0, \boldsymbol{r}_0) - p. \tag{5.31}$$

Равенство (5.31) позволяет определить расстояние от точки M_0 до плоскости P.

Если данная точка и начало координат лежат по одну сторону от плоскости, то будем иметь:

$$d = -(\boldsymbol{n}^0, \boldsymbol{r}_0) + p.$$

Таким образом, в общем случае:

$$d = |(\boldsymbol{n}^0, \boldsymbol{r}_0) - p|. \tag{5.32}$$

Выражая скалярное произведение $(\boldsymbol{n}^0, \boldsymbol{r}_0)$ через проекции сомножителей, получим в координатах формулу:

$$d = | x_0 \cdot \cos\alpha + y_0 \cdot \cos\beta + z_0 \cdot \cos\gamma - p |. \tag{5.33}$$

Если точка M_0 имеет координаты x_0, y_0, z_0, а уравнение плоскости P даётся в виде $Ax + By + Cz + D = 0$, то нормируя уравнение, а затем, подставляя вместо текущих координат координаты точки M_0, получим формулу для определения расстояния от точки M_0 до плоскости P в координатной форме:

$$d = \frac{| Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{5.34}$$

Учитывая формулы (5.32), (5.33) и (5.34), приходим к следующему правилу:

Чтобы найти расстояние от точки до плоскости, следует подставить в нормальное векторное уравнение плоскости вместо текущего *радиуса – вектора радиус-вектор данной точки. Левая часть уравнения при этом обратится в число, абсолютная величина которого покажет расстояние от точки до плоскости, а знак покажет, с какой стороны от плоскости расположена точка.*

Задача 8. Вычислить расстояние плоскости $15x-10y+6z-190=0$ от начала координат.

Р е ш е н и е. По формуле (5.34)

$$d=\frac{|\,15\cdot 0-10\cdot 0+6\cdot 0-190\,|}{\sqrt{15^2+(-10)^2+6^2}}=\frac{|-190|}{\sqrt{361}}=\frac{190}{19}=10.$$

Таким образом, расстояние плоскости от начало координат равно 10 единицам.

Задача 9. Вычислить расстояние точки $M(3;1;-1)$ от плоскости $22x+4y-20z-45=0$.

Р е ш е н и е. Напишем нормальное уравнение данной плоскости, умножив данное уравнение на нормирующий множитель:

$$M=\frac{1}{\sqrt{22^2+4^2+(-20)^2}}=\frac{1}{\sqrt{484+16+400}}=\frac{1}{\sqrt{900}}=\frac{1}{30};$$

получим:

$$\frac{22}{30}x+\frac{4}{30}y-\frac{20}{30}z-\frac{45}{30}=0.$$

Отклонение точки от плоскости будет:

$$d=\frac{11}{15}\cdot 3+\frac{2}{15}\cdot 1-\frac{2}{3}\cdot(-1)-\frac{3}{2}=\frac{45}{15}-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}.$$

Знак плюс означает, что данная точка и начало координат лежат по разные стороны данной плоскости.

Примеры решения задач

Задача 1. Даны две точки $M_1(3;-1;2)$ и $M_2(4;-2;-1)$. Составить уравнения плоскости, проходящей через точку M_1 перпендикулярно вектору $\boldsymbol{M_1M_2}$.

Р е ш е н и е. По условию вектор $\boldsymbol{M_1M_2}$ является нормальным вектором искомой плоскости, т.е. $\boldsymbol{M_1M_2}=\boldsymbol{n}=(1;-1;-3)$. Уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 перпендикулярно вектору $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{M_1M_2}$ есть

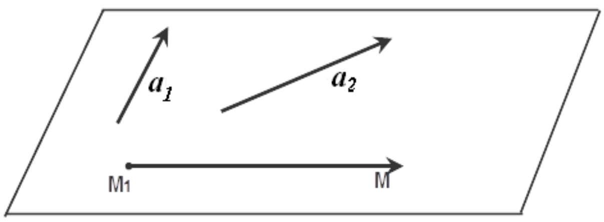


Рис. 5.9

$$A(x-3)+B(y+1)+C(z-2)=0$$

или

$$1\cdot(x-3)+(-1)(y+1)+(-3)(z-2)=0.$$

Откуда $x-y-3z+2=0.$

О т в е т: $x-y-3z+2=0$.

Задача 2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1=(3;4;-5)$ параллельно двум векторам $\boldsymbol{a_1}=\{3;1;-1\}$ и $\boldsymbol{a_2}=\{1;-2;1\}$.

Р е ш е н и е. Отложим вектор $\boldsymbol{a_1}$ и $\boldsymbol{a_2}$ в плоскости, проходящей через точку M_1, и возьмём на искомой плоскости точку $M(x;y;z)$ с текущими координатами. Получим, что три вектора $\boldsymbol{M_1M}=\{x-3;y-4;z+5\}$; $\boldsymbol{a_1}=\{3;1;-1\}$ и $\boldsymbol{a_2}=\{1;-2;1\}$ лежат в одной плоскости, т.е. они компланарны (Рис 5.9). Поэтому из условий компланарности, имеем:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z+5 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

откуда получим: $x+4y+7z+16=0.$

О т в е т: $x+4y+7z+16=0.$

Задача 3. Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат перпендикулярно к двум плоскостям $2x-y+3z-1=0,\ x+2y+z=0.$

Р е ш е н и е. Пусть $M(x;y;z)$ произвольная точка искомой плоскости. Так как эта плоскость перпендикулярна плоскостям $2x-y+3z-1=0,$ и $x+2y+z=0,$ то нормальный вектора $\boldsymbol{n_1}=\{2;-1;3\}$, $\boldsymbol{n_2}=\{1;2;1\}$ и вектор $\boldsymbol{OM}$ компланарны.

Следовательно,

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0 \qquad \text{или} \qquad 7x-y+5z=0.$$

О т в е т: $7x-y+5z=0.$

Задача 4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1=\{7;2;-3\}$ и $M_2=\{5;6;-4\}$ параллельно оси Ox.

Р е ш е н и е. Уравнение плоскости, параллельной оси Ox, имеет вид $By+Cz+D=0$ где B,C,D - отличные от нуля. Запишем это уравнение в виде $\frac{B}{D}y+\frac{C}{D}z+1=0$. Так как эта плоскость проходит через точки M_1 и M_2, то координаты этих точек удовлетворят искомому уравнению, получаем линейную алгебраическую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2\cdot\dfrac{B}{D}-3\cdot\dfrac{C}{D}+1=0 \\ 6\cdot\dfrac{B}{D}-4\cdot\dfrac{C}{D}+1=0 \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{B}{D}=\frac{1}{10}, \quad \frac{C}{D}=\frac{2}{5}.$$

Тогда $\frac{1}{10}y+\frac{2}{5}z+1=0.$ или $y+4z+10=0.$

О т в е т: $y+4z+10=0.$

Задача 5. Найти расстояние между параллельными плоскостями $x-2y-2z-12=0$ и $x-2y-2z-6=0$.

Р е ш е н и е. Для определения искомого расстояния выберем фиксированную точку на одной плоскости и пусть $x_1=y_1=0,$ тогда $z_1=-6$. Уравнение другой плоскости запишем в нормированном виде и найдём расстояние точки $M(0;0;-6)$ до этой плоскости.

$$d=\frac{|x_1-2y_1-2z_1-6|}{\sqrt{1+4+4}}=\left|\frac{0-2\cdot 0+12-6}{3}\right|=\frac{6}{3}=2.$$

Задача 6. Составить уравнения плоскостей, которые делят пополам двугранные углы, образованные двумя пересекающимся плоскостями $5x-5y-2z-3=0.$ $x+7y-2z+1=0.$

Р е ш е н и е. Каждая точка $M(x;y;z)$, находящаяся на плоскости, которая делит двугранный угол пополам, равноудалена от заданных плоскостей. Поэтому, используя нормированное уравнение плоскости для определения расстояния точки $M(x;y;z)$ до одной плоскости d_1 и до другой плоскости d_2, получим:

$$\left|\frac{1}{\sqrt{54}}(5x-5y-2x-3)\right|=\left|\frac{1}{\sqrt{54}}(x+7y-2z+1)\right|.$$

Раскрывая модули, имеем уравнения искомых плоскостей:

$$x-3y-1=0,\ 3x+y-2z-1=0.$$

О т в е т: $x-3y-1=0,\ 3x+y-2z-1=0.$

Задача 7. Составить уравнение плоскости, равноудалённой от точек $P(1;-4;2)$, $Q(7;1;-5)$ и перпендикулярной отрезку, соединяющему эти точки.

Р е ш е н и е. Искомая плоскость делит отрезок PQ пополам и перпендикулярна ему. Значит, нормальный вектор плоскости $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{PQ}=(6;5;-7),$ а координаты середины отрезка найдём по известным формулам делением отрезка в данном отношении:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=4; \quad y=\frac{y_1+y_2}{2}=-\frac{3}{2}; \quad z=\frac{z_1+z_2}{2}=-\frac{3}{2};$$

или $M(4;\frac{-3}{2};\frac{-3}{2})$. Откуда, имеем:

$$6\cdot(x-4)+5\cdot\left(y+\frac{3}{2}\right)-7\cdot\left(z+\frac{3}{2}\right)=0,$$

или $6x+5y-7z-27=0$.

О т в е т: $6x+5y-7z-27=0$.

Задача 8. Вычислить объём пирамиды, ограниченный координатными плоскостями и плоскостью $3x-2y+2z-12=0.$ Построить пирамиду.

Р е ш е н и е. Записывая уравнение плоскости в отрезках, имеем:

$$\frac{x}{4}-\frac{y}{6}+\frac{z}{6}=1.$$

По точкам $x=4,\ y=-6,\ z=6$ -пересечения плоскости с осями координат строим плоскость. Объём V пирамиды (Рис.5.10) равен:

$$V=\frac{1}{3}S\cdot H=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}OA\cdot OB\right)\cdot OC=24 \text{куб. ед.}$$

О т в е т: 24 куб. ед.

Задача 9. Определить, при каких значениях параметров m и l плоскости $2x+my+3z-5=0$ и $lx-6y-6z+2=0$ параллельны.

Р е ш е н и е. Если плоскости параллельны, то их нормальные векторы

$\boldsymbol{n_1}=\{2;m;3\}$ и $\boldsymbol{n_2}=\{l;-6;-6\}$ коллинеарные, т.е.

$$\frac{2}{l}=\frac{m}{-6}=\frac{3}{-6}.$$

Составляем две пропорции и находим значения параметров m и l:

$$\frac{2}{l}=\frac{-1}{2}\Rightarrow l=-4;\quad \frac{m}{-6}=-\frac{1}{2}\Rightarrow m=3.$$

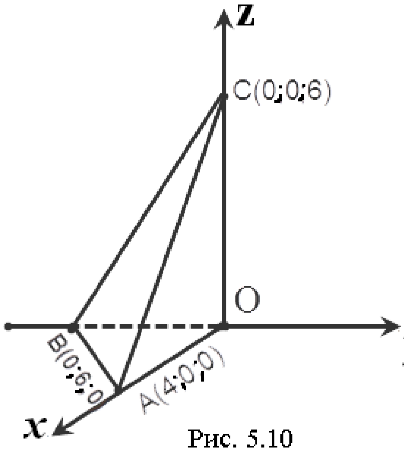


Рис. 5.10

О т в е т: $l=-4;\ m=3.$

Задача 10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку пересечения трёх плоскостей:

$$2x-y-z-1=0.\quad x+2z-4=0.\ \ x-y=0;$$

через начало координат и через точку $M(7;1;2)$.

Р е ш е н и е. Найдём точку пересечения трёх данных плоскостей, решив систему уравнений:

$$\begin{cases}2x-y-z-1=0,\\ x+2z-4=0,\\ x-y=0,\end{cases}\qquad \begin{cases}2x-y-z=1,\\ x+2z=4,\\ x-y=0.\end{cases}$$

Найдём определитель системы:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=3.$$

Найдём Δ_x

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ 4 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 0\end{vmatrix}=6.$$

Таким образом,

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{6}{3} = 2,\ x = 2.$$

Из третьего уравнения системы находим, что $y = x$ или $y = 2$.

Из второго уравнения системы находим:

$$z = \frac{4 - x}{2}, \quad z = \frac{4 - 2}{2} = 1, \quad z = 1.$$

Точка пересечения трёх данных плоскостей $N(2;2;1)$.

Уравнение плоскости, проходящей через начало координат, следующее:

$$Ax + By + Cz = 0.$$

Условие прохождения плоскости через точку $M(7;1;2)$ даёт уравнение:

$$7A + B + 2C = 0.$$

Условие прохождении плоскости через точку $N(2;2;1)$ даёт ещё одно уравнение:

$$2A + 2B + C = 0.$$

Решаем систему уравнений

$$\begin{cases} 7A + B + 2C = 0, \\ 2A + 2B + C = 0. \end{cases}$$

получим:

$$\begin{cases} 7\dfrac{A}{C} + \dfrac{B}{C} + 2 = 0, \\ 2\dfrac{A}{C} + 2\dfrac{B}{C} + 1 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -14\dfrac{A}{C} - 2\dfrac{B}{C} - 4 = 0, \\ 2\dfrac{A}{C} + 2\dfrac{B}{C} + 1 = 0, \end{cases}$$

$$\frac{A}{C} = -\frac{1}{4}; \quad 7 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{B}{C} + 2 = 0;$$

$$\frac{B}{C} = \frac{7}{4} - 2 = -\frac{1}{4}; \quad \frac{B}{C} = -\frac{1}{4}.$$

Таким образом, $A : B : C = 1 : 1 : (-4)$.

Искомое уравнение плоскости $x + y - 4z = 0$.

О т в е т: $x + y - 4z = 0$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Построить плоскость $2x + 3y + 6z - 12 = 0$ и найти углы нормали к плоскости с осями координат.

2. Составить уравнение плоскости, которая проходит:

а) через точку $M_1(2;-3;3)$ параллельно плоскости Oxy;

б) через точку $M_2(1;-2;4)$ параллельно плоскости Oxz;

в) через точку $M_3(-5;2;-1)$ параллельно плоскости Oyz.

3. Привести к нормальному виду уравнения следующих плоскостей:

а) $2x-9y+6z-22=0$;

б) $10x+2y-11z+60=0$;

в) $6x-6y-7z+33=0$.

4. Даны две точки $A(3;5;6)$ и $B(5;-7;4)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно отрезку AB.

5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(3;2;-3)$ и $B(1;-5;1)$ параллельно оси Ox.

6. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(5;3;2)$ параллельно векторам $\boldsymbol{a}=\{4;1;2\}$ и $\boldsymbol{b}=\{5;3;1\}$.

7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2;-1;3)$ и $M_2(3;1;2)$ параллельно вектору $\boldsymbol{a}=\{3;-1;-4\}$.

8. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(3;-1;2)$, $M_2(4;-1;-1)$ и $M_3(2;0;2)$.

9. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно плоскостям $9x+5y+7z-21=0$ и $4x+2y+3z+15=0$.

10. Даны вершины тетраэдра $A(4;0;2)$, $B(0;5;1)$ $C(4;-1;3)$ $D(3;-1;5)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через вершину A параллельно грани BCD.

11. Найти угол между плоскостями $x+2y-2z+1=0$, $x+y-4=0$.

12. Определить, при каких значениях l и m плоскости $mx+3y-2z-1=0$ и $2x-5y-lz=0$ параллельны.

13. Две грани куба лежат на плоскостях $2x-2y+z-1=0$, $2x-2y+z+5=0$. Вычислить объём этого куба.

14. В каждом из следующих случаев вычислить расстояние между параллельными плоскостями:

а) $\begin{matrix} x-2y-2z-12=0, \\ x-2y-2z-6=0, \end{matrix}$ б) $\begin{matrix} 2x-3y+6z-14=0, \\ 4x-6y+12z-21=0, \end{matrix}$ в) $\begin{matrix} 2x-y+2z+9=0, \\ 4x-2y+4z-21=0. \end{matrix}$

15. В пучке плоскостей $2x-3y+z-3+\alpha(x+3y+2z+1)=0$, найти плоскость, которая: а) проходит через точку $M_1(1;-2;3)$; б) параллельна оси Ox; в) параллельна оси Oy; г) параллельна оси Oz.

Ответы

1. $\cos a = \frac{2}{7}; \ \cos\beta = \frac{3}{7}; \ \ \cos\gamma = \frac{6}{7};$

2. а) $z - 3 = 0,$ б) $y + 2 = 0,$ в) $x + 5 = 0,$

3. а) $\frac{2,}{11}x - \frac{9}{11}y + \frac{6}{11}z - 2 = 0,$ б) $-\frac{2,}{3}x - \frac{2}{15}y + \frac{11}{15}z - 4 = 0,$

в) $-\frac{6,}{11}x + \frac{6}{11}y + \frac{7}{11}z - 3 = 0,$

4. $x - 6y - z + 33 = 0,$ **5.** $4y + 7z + 13 = 0,$ **6.** $5x - 6y - 7z + 7 = 0,$

7. $9x - y + 7z - 40 = 0,$ **8.** $3x + 3y + z - 8 = 0,$ **9.** $x + y - 2z = 0,$

10. $6x + 5y + 3z - 30 = 0,$ **11.** $45^0,$ **12.** $l = -\frac{10}{3}; \ m = -\frac{6}{3};$

13. *8 куб. ед.;* ***14.*** а) $d = 2;$ б) $d = 3{,}5;$ в) $d = 6{,}5;$

15. а) $2x + 15y + 7z + 7 = 0,$ б) $9y + 3z + 5 = 0,$ в) $3x + 3z - 2 = 0,$ г) $3x - 9y - 7 = 0.$

Глава VI
Прямая линия в пространстве
§ 6.1. Параметрические и канонические уравнения прямой линии в пространстве

Положение прямой линии в пространстве будет вполне определено, если зададим на прямой определённую точку $M_0\{x_0,y_0,z_0\}$ при помощи её радиуса-вектора $\boldsymbol{r_0}$ и вектора $\boldsymbol{a}\{l,m,n\}$ (отличный от нулевого), которому прямая параллельна (Рис. 6.1). Вектор $\boldsymbol{a}$ называется *направляющим вектором* прямой. Обозначим через $\boldsymbol{r}$ радиуса – вектор точки $M\{x,y,z\}$.

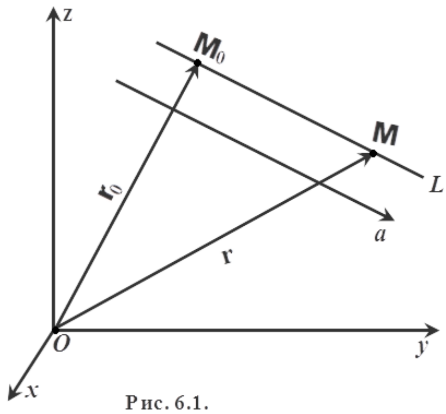


Рис. 6.1.

Из рис. 6.1 видно, что

$$\boldsymbol{OM} = \boldsymbol{OM_0} + \boldsymbol{M_0M}$$

или

$$\boldsymbol{OM} - \boldsymbol{OM_0} = \boldsymbol{M_0M}. \qquad (6.1)$$

Вектор $\boldsymbol{M_0M}$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{a}$, и может быть представлен в виде $\boldsymbol{M_0M} = \boldsymbol{a}\cdot t$, где t является параметром, принимающим различные значения в зависимости от положения точки M на прямой линии. Уравнение (6.1) можно записать в виде:

$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_0} = \boldsymbol{a}\cdot t$$

или

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_0} + \boldsymbol{a}\cdot t. \qquad (6.2)$$

Так как этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки $M\{x,y,z\}$ прямой и не удовлетворяют координаты точки, не лежащей на этой прямой, то уравнение (6.2) является уравнением прямой линии в пространстве. Полученное уравнение называется *параметрическим уравнением прямой* в пространстве *в векторной форме.*

Поскольку $\boldsymbol{r_0}$ и $\boldsymbol{r}$ являются радиус – векторами точек M_0 и M, т.е. $\boldsymbol{r_0} = \{x_0,y_0,z_0\}$ и $\boldsymbol{r} = \{x,y,z\}$, то уравнение (6.2) можно записать в координатной форме в виде:

$$x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} = (x_0 + lt)\boldsymbol{i} + (y_0 + mt)\boldsymbol{j} + (z_0 + nt)\boldsymbol{k},$$

Откуда, получим:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt. \end{cases} \qquad (6.3)$$

Равенства (6.3) являются *параметрическими уравнениями прямой* в пространстве в *координатной форме.* Так как l,m,n – проекции направляющего вектора $\boldsymbol{a}$, которому прямая параллельна, то числа l, m, n характеризуют направление прямой линии в пространстве и их принято называть *направляющими коэффициентами,* т.е. *угловыми коэффициентами прямой* в пространстве. Если вектор $\boldsymbol{a}$ единичный, т.е. $\boldsymbol{a} = a^0$ $\left(\left|\boldsymbol{a}^0\right| = 1\right)$, и $\alpha, \beta, \gamma -$ углы образованные данной прямой с осями координат OX, OY, OZ (по направлениям вектора $\boldsymbol{a}^0$), то коэффициенты l, m, n становятся косинусами данных углов, и формулы (6.2) и (6.3) примут вид:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t \cdot \boldsymbol{a}^0, \tag{6.4}$$

$$x = x_0 + t\cos\alpha, \quad y = y_0 + t\cos\beta, \quad z = z_0 + t\cos\gamma. \tag{6.5}$$

В этом случае параметр t обозначает расстояние переменной точки M от точки $M_0\{x_0, y_0, z_0\}$, взятое со знаком $+$ или $-$ в зависимости от направления вектора $\boldsymbol{M_0M}$.

Очевидно, что

$$\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}| \cdot \boldsymbol{a}^0,$$

и, записывая данное равенство в координатной форме, получим:

$$l = |\boldsymbol{a}| \cdot cos\alpha, \ m = |\boldsymbol{a}| \cdot cos\beta, \ n = |\boldsymbol{a}| \cdot cos\gamma. \tag{6.6}$$

Из равенств (6.6) определяем:

$$l : m : n = cos\alpha : cos\beta : cos\gamma,$$

т.е. l, m, n пропорциональны направляющим косинусам прямой линии, причём множителем пропорциональности служит длина $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}$ вектора $\boldsymbol{a} = \{l, m, n\}$.

Таким образом, используя формулы (6.6), находим:

$$\left.\begin{aligned} cos\alpha &= \frac{l}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}, \\ cos\beta &= \frac{m}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}, \\ cos\gamma &= \frac{n}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{6.7}$$

Исключая из равенств (6.3) параметр t, получим:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \tag{6.8}$$

Этим равенствам будут удовлетворять координаты каждой точки, лежащей на прямой, и только они, т.е. равенства (6.8) являются уравнениями прямой линии в пространстве. Их называют *каноническими уравнениями прямой.*

Заметим, что в равенствах (6.8) l, m, n одновременно обращаться в нуль не могут, так как вектор $\boldsymbol{a}$ не нулевой. Но некоторые из них могут быть равны нулю.

Пусть например, $l = 0$ а $m \neq 0$. Тогда

$$m(x-x_0)=0\cdot(y-y_0),$$

т.е. $x-x_0=0$, и $cos\alpha=0$. Это означает, что данная прямая перпендикулярна к оси абсцисс. Следовательно, данная прямая определяется системой уравнений:

$$\begin{cases} x-x_0=0, \\ \dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}. \end{cases}$$

и т.д.

Из равенства (6.8), в частности при $l=cos\alpha$, $m=cos\beta$, $n=cos\gamma$, можно получить:

$$\frac{x-x_0}{cos\alpha}=\frac{y-y_0}{cos\beta}=\frac{z-z_0}{cos\gamma}.$$

§ 6.2. Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две точки

Пусть дана некоторая прямая, проходящая через точку $M_1\{x_1,y_1,z_1\}$, радиус-вектор которой $\boldsymbol{r_1}$, и через точку $M_2\{x_2,y_2,z_2\}$, радиус-вектор которой $\boldsymbol{r_2}$. Требуется составить уравнение этой прямой.

Составим уравнение прямой, проходящей через точку M_1, в каноническом виде:

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}, \tag{6.9}$$

где $\boldsymbol{a}=\{l,m,n\}$- направляющий вектор прямой.

Рассмотрим векторы $\boldsymbol{r_1}=\{x_1,y_1,z_1\}$, $\boldsymbol{r_2}=\{x_2,y_2,z_2\}$ и $\boldsymbol{M_1M_2}=\boldsymbol{r_2}-\boldsymbol{r_1}$. Координатам вектора $\boldsymbol{r_2}-\boldsymbol{r_1}$ будут $\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$.

Так как векторы $\boldsymbol{r_2}-\boldsymbol{r_1}$ и $\boldsymbol{a}$ коллинеарны, то их координаты пропорциональны, т.е.

$$\frac{x_2-x_1}{l}=\frac{y_2-y_1}{m}=\frac{z_2-z_1}{n}. \tag{6.10}$$

Подставив в уравнение (6.9) вместо l,m,n величины, им пропорциональные, получим искомое уравнение прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{x_2-x_1}=\frac{z-z_1}{x_2-x_1}. \tag{6.11}$$

Векторное уравнение прямой (6.2) было получено при условии, что вектор $\boldsymbol{MM_0}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r_0}$, лежащий на прямой, и направляющий вектор $\boldsymbol{a}$ коллинеарны. Условие коллинеарности можно написать и в другой форме, т.е. приравнять нулю векторное произведение этих векторов

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r_0})\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}\ . \tag{6.12}$$

Уравнение (6.12) есть векторное уравнение прямой, которое в отличие от уравнения (6.2), не является параметрическим.

Уравнение (6.12) можно привести в координатную форму, т.е.

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0.$$

Разложим этот определитель по элементам первой строки и вспомним, что вектор равен нулю тогда и только тогда, когда все его координаты равны нулю:

$$n(y - y_0) = m(z - z_0),$$
$$l(z - z_0) = n(x - x_0),$$
$$m(x - x_0) = l(y - y_0).$$

Деля первое уравнение на nm, второе –на ln и третье –на ml, приведём их к виду (6.8).

Задача 6.1. Написать уравнение прямой, проходящей через точки $A(2;3;-5)$ и $B(3;-2;4)$.

Р е ш е н и е. Уравнение искомой прямой найдём по формулам (6.8):

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z+5}{9},$$

где $\boldsymbol{a} = \{1;-5;9\}$-направляющий вектор прямой.

§ 6.3. Прямая как линия пересечения двух плоскостей. Общие уравнения прямой

Прямую в пространстве можно задать также как линию пересечения двух плоскостей. Всякие две не параллельные между собой плоскости с общими уравнениями:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \tag{6.13}$$

определяют прямую их пересечения. Уравнения (6.13) называются *общими уравнениями прямой.* Уравнения плоскостей (6.13) пересекаются по некоторой прямой L. Ясно, что координаты любой точки этой прямой удовлетворяют обоим уравнениям (6.13), и обратно, всякая точка, координаты которой удовлетворяют обоим уравнениям (6.13), лежит на прямой L. Таким образом, пара уравнений (6.13) задаёт прямую.

От общих уравнений прямой (6.13) можно перейти к её каноническим уравнениям. Для этого нужно знать какую-нибудь точку прямой и направляющий вектор. Координаты точки можно найти из уравнений (6.13), выбирая одну из координат произвольно и решая после этого систему двух уравнений относительно оставшихся двух координат.

Для отыскания направляющего вектора $\boldsymbol{a}$ прямой L заметим, что этот вектор, направленный по линии пересечения данных плоскостей, должен быть перпендикулярен к обоим нормальным векторам $\boldsymbol{n_1}\{A_1, B_1, C_1\}$, $\boldsymbol{n_2}\{A_2, B_2, C_2\}$ этих плоскостей. Обратно, всякий вектор, перпендикулярный к $\boldsymbol{n_1}$ и $\boldsymbol{n_2}$, параллелен обоим плоскостям, а следовательно, и данной прямой, так что можно положить $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{n_1} \times \boldsymbol{n_2}$.

Замечание 6.1. Найдём векторное произведение $[\boldsymbol{n_1}, \boldsymbol{n_2}]$:

$$[\boldsymbol{n_1}, \boldsymbol{n_2}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} + \boldsymbol{j}\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} + \boldsymbol{k}\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}. \qquad (6.14)$$

Из определения векторного произведения следует, что вектор $[\boldsymbol{n_1}, \boldsymbol{n_2}]$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{a}$ (Рис. 6.2). Следовательно, координаты этих двух векторов пропорциональны:

$$l : m : n = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}. \qquad (6.15)$$

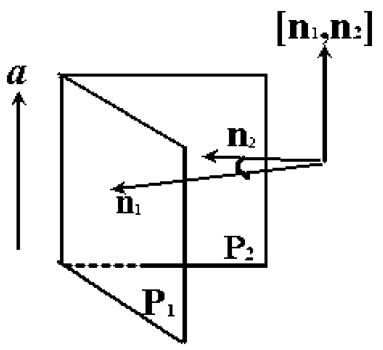


Рис. 6.2

Таким образом, в канонические уравнения прямой (6.10) вместо коэффициентов l, m, n можно подставить числа, им пропорциональные, и получить уравнения

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

Задача 6.2. Составить канонические уравнения прямой $x - 2y + 3z - 4 = 0$, $3x + 2y - 5z - 4 = 0$.

Р е ш е н и е 1).Полагая, например, $z_0 = 0$, получим $x - 2y = 4$ и $3x + 2y = 4$. Решая совместно эти уравнения, находим $x_0 = 2$ и $y_0 = -1$. Таким образом, координаты точки найдены: $M_0(2; -1; 0)$. Теперь найдем направляющий вектор $\boldsymbol{a}$:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{n_1} \times \boldsymbol{n_2} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 4\boldsymbol{i} + 14\boldsymbol{i} + 8\boldsymbol{k}.$$

Канонические уравнения прямой, проходящей через мочку M_0 и имеющей направляющей вектор $\boldsymbol{a}$, имеют вид:

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{14} + \frac{z}{8} \quad \text{или} \quad \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{7} = \frac{z}{4}. \qquad (6.16)$$

2). Решаем данную задачу, используя равенства (6.15).

$$l : m : n = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 : 14 : 8.$$

Следовательно, искомые уравнения имеют тот же вид, что в равенствах (6.16)

Замечание 6.2. Можно взять две произвольные точки, удовлетворяющие исходной системе, и составить канонические (параметрические) уравнения прямой, проходящей через две точки. Пусть одна точка будет $M_0(2;-1;0)$, а для нахождения второй точки полагаем, например, $x_1 = 0$, получим $-2y + 3z - 4 = 0$ и $2y - 5z - 4 = 0$, отсюда находим $y_1 = -8$, $z_1 = -4$. Тогда направляющий вектор $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{M_1 M_0}$ имеет координаты:

$$\boldsymbol{a} = \{x_0 - x_1;\ y_0 - y_1;\ z_0 - z_1\} = \{2;7;4\}.$$

Затем составляем уравнения искомой прямой.

§ 6.4. Проекции прямой на координатные плоскости

Пусть в канонических уравнениях прямой L:

$$\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n}$$

коэффициент n отличен от нуля, т.е. прямая L не параллельна плоскости XOY. Запишем эти уравнения раздельно в таком виде:

$$\frac{x-a}{l} = \frac{z-c}{n}, \qquad \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n}. \tag{6.17}$$

Каждое из уравнений (6.17) в отдельности выражает плоскость, причём первая из них параллельна оси OY, а вторая - оси OX. При их пересечения уравнения (6.17) вполне определяют прямую, проектируемую на плоскости координат XOZ и YOZ. Первое из уравнений (6.17), рассматриваемое в плоскости XOZ определяет проекцию данной прямой линии на эту плоскость; точно так же второе из уравнений (6.17), рассматриваемое в плоскости YOZ, определяет проекцию данной прямой линии на плоскости YOZ. Итак, уравнения прямой линии заданной в виде (6.17) – это значит дать её проекции на плоскости координат XOZ и YOZ.

Решая первое из уравнений (6.17) относительно x, а второе относительно y, найдём искомые уравнения в проекциях:

$$x = Mz + x_0,\ y = Nz + y_0. \tag{6.18}$$

Уравнения (6.18) называются уравнениями прямой в проекциях на плоскости XOZ и YOZ.

Укажем геометрический смысля параметров M и N. Рассматривая первое уравнение (6.18) в плоскости XOZ, мы видим, что, M есть угловой коэффициент проекции данной прямой на этой плоскости, т.е. M есть тангенс угла между проекцией данной прямой на плоскости XOZ и осью OZ. Аналогично, N есть тангенс угла между проекцией исходной прямой на плоскость YOZ и осью OZ.

Параметры x_0 и y_0 имеют очень простое геометрическое значение. Если в уравнениях (6.18) положим $z = 0$ (а это значит, что мы находим на данной прямой точку её пересечения с плоскостью XOY), то получим $x = x_0$, $y = y_0$. Следовательно, прямая (6.18) пересекается с плоскостью XOY в точке $(x_0, y_0, 0)$. Точка пересечения прямой с плоскостью, называется *следом* данной прямой на этой плоскости. Итак, параметры x_0 и y_0, фигурирующие в уравнениях (6.18), суть координаты следа данной прямой на плоскости XOY.

Замечание 6.3. Уравнения прямой нельзя представить в виде (6.18), если эта прямая параллельна плоскости XOY, т.е. когда в системе уравнений (6.13) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$. Во всех остальных случаях уравнение прямой можно представить в виде (6.18)

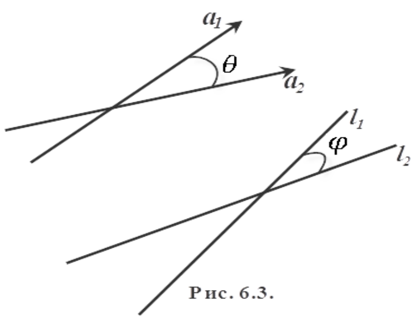


Рис. 6.3.

Задача 6.3. Привести к каноническому виду уравнения прямой

$$\begin{cases} 2x - 3y - 3z - 9 = 0, \\ x - 2y + z + 3 = 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Решая данные уравнения относительно x и y, найдём уравнения в проекциях:

$$x = 9z + 27, \qquad y = 5z + 15.$$

Выражаем из этих уравнений z:

$$z = \frac{x-27}{9}, \qquad z = \frac{y-15}{5},$$

и получаем канонические уравнения:

$$\frac{x-27}{9} = \frac{y-15}{5} = \frac{z}{1}.$$

Задача 6.4. Привести общие уравнения прямой:

$$\begin{cases} 6x + 2y - z - 9 = 0, \\ 3x + 2y + 2z - 12 = 0 \end{cases}$$

к уравнениям в проекциях на координатные плоскости XOZ и YOZ.

Р е ш е н и е. Чтобы найти уравнение проекции прямой на координатную плоскость XOZ, необходимо исключить из общих уравнений данной прямой y:

$$\begin{cases} 6x + 2y - z - 9 = 0, \\ 3x + 2y + 2z - 12 = 0; \end{cases} \qquad +\begin{cases} 6x + 2y - z - 9 = 0. \\ -3x - 2y - 2z + 12 = 0; \end{cases}$$
$$\overline{\quad 3x - 3z + 3 = 0; \quad}$$

$$x - z + 1 = 0, \quad z = x + 1.$$

Ищем уравнение проекции прямой на плоскость YOZ, исключая из общих уравнении прямой x:

$$\begin{cases} 6x + 2y - z - 9 = 0, \\ 3x + 2y + 2z - 12 = 0; \end{cases} \quad + \begin{cases} 6x + 2y - z - 9 = 0, \\ -6x - 4y - 4z + 24 = 0 \end{cases}$$
$$-2y - 5z + 15 = 0;$$

$$5z = -2y + 15, \qquad z = -\frac{2}{5}y + 3.$$

Итак,

$$\begin{cases} z = x + 1, \\ z = -\frac{2}{5}y + 3, \end{cases} \text{— уравнения прямой в проекциях.}$$

§ 6.5. Угол между двумя прямыми линиями

Углом между двумя прямыми в пространстве называют любой из углов, образованных двумя прямыми, проведенными из одной точки параллельно данным прямым.

Пусть уравнения двух прямых линий суть:

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}, \qquad (l_1);$$
$$\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}, \qquad (l_2);$$

где $\boldsymbol{a_1} = \{l_1, m_1, p_1\}$, $\boldsymbol{a_2} = \{l_2, m_2, p_2\}$.

Обозначим угол между прямыми l_1 и l_2 через φ, а угол между их направляющими векторами $\boldsymbol{a_1}$ и $\boldsymbol{a_2}$ - через θ (Рис. 6.3). При этом

$$cos\theta = \frac{(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2})}{|\boldsymbol{a_1}| \cdot |\boldsymbol{a_2}|}.$$

Так как $\varphi = \theta$ или $\varphi = \pi - \theta$, то $cos\varphi = \pm cos\theta$. Следовательно

$$cos\varphi = \pm \frac{(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2})}{|\boldsymbol{a_1}| \cdot |\boldsymbol{a_2}|}, \qquad (6.19)$$

или

$$cos\varphi = \pm \frac{l_1 \cdot l_2 + m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}} \; . \qquad (6.20)$$

Формулы (6.19) и (6.20) являются формулами для определения угла между двумя прямыми в пространстве.

Исследуем формулу (6.20): 1) Если $\angle\varphi = \frac{\pi}{2}$, то $cos\varphi = 0$, и из формулы (6.20) получим:

$$l_1 \cdot l_2 + m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 = 0, \qquad (6.21)$$

т.е. условие ортогональных двух векторов $\boldsymbol{a_1}$ и $\boldsymbol{a_2}$ является условием перпендикулярности двух прямых l_1 и l_2 в пространстве. 2). Если $\angle\varphi = 0$, то векторы $\boldsymbol{a_1}$ и $\boldsymbol{a_2}$ параллельны, т.е. векторы $\boldsymbol{a_1}$ и $\boldsymbol{a_2}$ являются коллинеарными. Тогда их соответствующие координаты пропорциональны;

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}. \qquad (6.22)$$

Условие (6.22) является условием параллельности двух прямых l_1 и l_2 в пространстве.

Задача 6.5. Найти угол между прямыми:

$$\begin{cases} 2x - 2y - z + 8 = 0, \\ x + 2y - 2z + 1 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x + y + 3z - 21 = 0, \\ 2x + 2y - 3z + 15 = 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Обозначим угловые коэффициенты прямых L_1 и L_2 через l_1, m_1, n_1; l_2, m_2, n_2 и найдём их отношения, используя равенства (6.15):

$$l_1 : m_1 : n_1 = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6:3:6 = 2:1:2;$$

$$l_2 : m_2 : n_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -9:18:6 = -3:6:2,$$

т.е. $\boldsymbol{a_1} = \{2,1,2\}$ и $\boldsymbol{a_2} = \{-3,6,2\}$.

Тогда, согласно формуле (6.20), имеем:

$$cos\varphi = \frac{2 \cdot (-3) + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 2}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + 6^2 + 2^2}} = \frac{-6 + 6 + 4}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{49}} = \frac{4}{21};$$

Ответ:

$$cos\varphi = \frac{4}{21}.$$

.

Задача 6.6. Через точку $M(2,-3,-8)$ провести прямую, параллельную прямой

$$l\colon\ \frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z+3}{5}.$$

Р е ш е н и е. Составим уравнение прямой l, проходящей через точку M:

$$\frac{x-2}{l} = \frac{y+3}{m} = \frac{z+8}{n}.$$

Так как прямая l параллельна прямой l_1, то согласно условием их коллинеарности, имеем:

$$\frac{l}{3} = \frac{m}{-2} = \frac{n}{5}.$$

Откуда имеем: $l = 3; m = -2; n = 5.$

Тогда уравнение прямой l имеет вид:

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z+8}{5}.$$

Задача 6.7. Через точку $M(2,-6,3)$ провести прямую перпендикулярно прямой

$$\begin{cases}2x-y+3z-1=0,\\5x+4y-z-7=0.\end{cases}$$

Р е ш е н и е . Составим уравнения любой прямой, проходящей через точку M:

$$l:\ \frac{x-2}{l}=\frac{y+6}{m}=\frac{z-3}{n}.$$

Используя равенства (6.15), имеем:

$$l:m:n=\begin{vmatrix}-1 & 3\\4 & -1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}3 & 2\\-1 & 5\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}2 & -1\\5 & 4\end{vmatrix}=13:17:13.$$

Подставляя в уравнение прямой l вместо l,m,n пропорциональные им величины, получим искомые уравнения:

$$\frac{x-2}{13}=\frac{y+6}{17}=\frac{z-3}{13}.$$

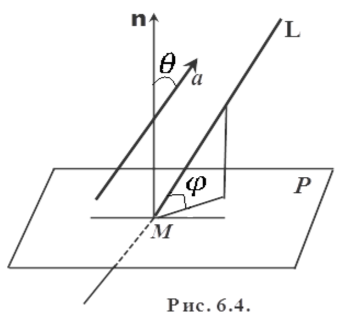


Рис. 6.4.

§ 6.6. Угол между прямой и плоскостью

Угол φ между прямой и плоскостью (Рис.6.4) будем называть любой из двух смежных углов, образованных прямой и её проекцией на плоскость.

Пусть уравнения прямой L суть:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},$$

а уравнение плоскости P:

$$Ax+By+Cz+D=0$$

и требуется найти угол φ между ними.

Приложим направляющий вектор $\boldsymbol{a}\{l,m,n\}$ прямой L и нормальный вектор $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$ данной плоскости в точке M пересечения и данной прямой с плоскостью P.

Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{n}$ направлены в одну сторону от плоскости, то угол θ между ними равен $\theta=90^0-\varphi$, если же $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{n}$ направлены в разные стороны, то $\theta = 90^0 + \varphi$. Итак, согласно формуле угол между двумя векторами, имеем:

$$cos\theta = \frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{n}|},$$

где $cos\theta = \cos(90^0 \pm \varphi) = |sin\varphi|$, отсюда

$$sin\varphi = \frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{n}|} = \frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}. \qquad (6.22)$$

Условие ортогональности двух векторов $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{a}$ может быть записано так: $(\boldsymbol{n},\boldsymbol{a}) = 0$.

Для того, чтобы прямая L была перпендикулярна плоскости P, необходимо и достаточно, чтобы вектор $\boldsymbol{a}$ был коллинеарен вектору $\boldsymbol{n}$, т.е. когда

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}. \qquad (6.23)$$

Равенства (6.23) называются условием перпендикулярности прямой L с плоскостью P.

Условие коллинеарности двух векторов $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{a}$ может быть записано в виде $[\boldsymbol{n},\boldsymbol{a}] = \boldsymbol{0}$, т.е. когда $\boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{a}$. Тогда

$$Al + Bm + Cn = 0. \qquad (6.24)$$

Равенство (6.24) является условием параллельности прямой L, с плоскостью P.

Замечание 6.4. Если: 1) прямая параллельна плоскости; 2) прямая имеет с плоскостью общую точку; то данная прямая лежит в плоскости.

Даём сводку всех полученных выше приведенных условии параллельности и перпендикулярности плоскостей и прямых в пространстве

	Условия параллельности	Условия перпендикулярности
Для двух плоскостей	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$	$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$
Для двух прямых	$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$	$l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$
Для прямой и плоскости	$Al + Bm + Cn = 0$	$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$

Задача 6.8. Найти угол между прямой

$$\begin{cases} 3x + y - z + 1 = 0, \\ 2x - y + 4z - 2 = 0. \end{cases}$$

и плоскостью $x - 8y + 3z + 6 = 0$.

Р е ш е н и е. Находим координаты направляющего вектора $\boldsymbol{a}$ данной прямой:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 3\boldsymbol{i} - 14\boldsymbol{j} - 5\boldsymbol{k}.$$

Тогда по формуле (6.22)

$$sin\varphi = \frac{3\cdot 1+(-14)\cdot(-8)+3\cdot(-5)}{\sqrt{9+196+25}\cdot\sqrt{1+64+9}} = \frac{150}{128{,}14} = 0{,}7803.$$

Откуда $\varphi = 50^0 03^I$.

Задача 6.9. Найти уравнение проекции прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-2}{2}$ на плоскости P, заданную уравнением $3x + 2y - z - 5 = 0$.

Р е ш е н и е. Проектирующая плоскость Q проходит через данную прямую и перпендикулярна к заданной плоскости P (Рис.6.5).

Из уравнений прямой следует, что $M_1(1;-2;2)$- одна из точек прямой. Так как плоскость Q проходит через данную прямую, то она имеет с прямой общую точку M_1 и параллельна этой прямой. Поэтому уравнение плоскости Q имеет вид:

$$A(x-1) + B(y+2) + C(z-2) = 0 \qquad (6.25)$$

и по условиям параллельности плоскости Q и данной прямой (6.24) и перпендикулярности Q с плоскостью P (6.23),

имеем;

$$\begin{cases} 2A - 3B + 2C = 0, \\ 3A + 2B - C = 0. \end{cases} \qquad (6.26)$$

Решив систему (6.26), получим:

$$\frac{A}{\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{B}{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{C}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}; \qquad \frac{A}{-1} = \frac{B}{8} = \frac{C}{13},$$

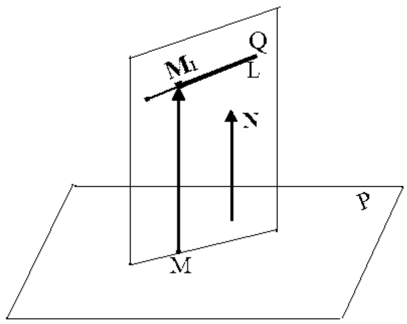


Рис.6.5

откуда $A = -1, B = 8, C = 13$.

Поставив найденные значения A, B и C в уравнение (6.25), получим уравнение плоскости Q:

$$-1\cdot(x-1) + 8(y+2) + 13(z-2) = 0,$$

или $x - 8y - 13z + 9 = 0.$ (Q).

Проверка уравнения плоскости Q и условий (6.26).

$$1\cdot 1 - 8\cdot(-2) - 13\cdot 2 + 9 = 0.$$

$$2\cdot(-1) - 3\cdot 8 + 2\cdot 13 = 0; \qquad 3\cdot(-1) + 2\cdot 8 + 13\cdot(-1) = 0.$$

Искомая проекция есть линия пересечения плоскостей P и Q, следовательно её уравнениями будут:

$$\begin{cases} x - 8y - 13z + 9 = 0, \\ 3x + 2y - z - 5 = 0. \end{cases}$$

Второе решение. Пусть $M(x, y, z)$ - произвольная точка проектирующей плоскости Q. Точка $M_1(1; -2; 2)$ лежит на данной прямой L. Тогда, вектор $MM_1\{x-1; y+2; z-2\}$ лежит в плоскости Q, а направляющий вектор данной прямой $\boldsymbol{a}\{2; -3; 2\}$ и нормальный вектор $\boldsymbol{N}\{3; 2; -1\}$ плоскости P можно также расположить в плоскости Q. Условие компланарности векторов $\boldsymbol{MM_1}$, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{N}$ даёт уравнение плоскости Q:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

или $x - 8y - 13z + 9 = 0$. Это уравнение в совокупности с уравнением $3x + 2y - z - 5 = 0$ плоскости P и определяют искомую проекцию.

§ 6.7. Точка пересечения прямой с плоскостью

Пусть даны уравнение прямой l $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_0} + \boldsymbol{a}t$, где $\boldsymbol{a} = (l, m, n)$, $\boldsymbol{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$ и уравнение $(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{r}) + D = 0$ плоскости P, где $\boldsymbol{N} = (A, B, C)$, $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$.

Полагаем, что M_1- точка пересечения прямой l с плоскостью P (Рис.6.6). Обозначим через t_1 значение параметра t для точки M_1.

Так как при этом значении параметра вектор $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_0} + \boldsymbol{a}t_1$ является радиусом-вектором точки, лежащей на плоскости, то, подставив его в уравнение плоскости $(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{r}) + D = 0$, получим:

$\big(\boldsymbol{N}, (\boldsymbol{r_0} + \boldsymbol{a}t_1)\big) + D = 0$, т.е.

$$t_1(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{N}, \boldsymbol{r_0}) + D = 0.$$

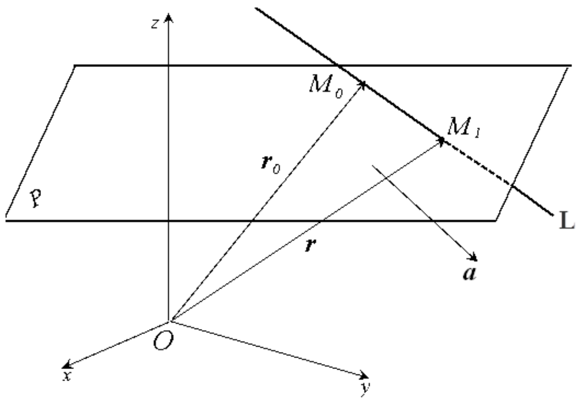


Рис 6.6

Если $(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{a}) \neq 0$, то из последнего равенства получим

$$t_1 = -\frac{(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{r_0}) + D}{(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{a})}. \qquad (6.27)$$

Подставляя значение t_1 в уравнение прямой l, найдем радиус-вектор $\boldsymbol{r_1}$ точки пересечения прямой l, с плоскостью P: т.е. $\boldsymbol{r_1} = \boldsymbol{r_0} + \boldsymbol{a}t_1$.

Если прямая и плоскость заданы координатными уравнениями:

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n},\\ Ax+By+Cz+D=0,\end{array}\right\}$$

то точка их пересечения определяется формулами:

$$\left.\begin{array}{l}x=x_0+t_1 l,\\ y=y_0+t_1 m,\\ z=z_0+t_1 n,\end{array}\right\}$$

где t_1 определяется из равенства (6.27), т.е.

$$t_1=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Al+Bm+Cn}. \tag{6.28}$$

Исследуем формулу (6.28). Если знаменатель $Al+Bm+Cn\neq 0$, то формулы (6.28) дают вполне определенную точку пересечения. Случай же, когда знаменатель равен нулю, распадается на два.

1). Пусть

$$\left.\begin{array}{l}Al+Bm+Cn=0,\\ Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0.\end{array}\right\} \tag{6.29}$$

В этом случае для t_1, получается бесконечное значение и точка пересечения оказывается бесконечно удалённой. Геометрическое объяснение этого следующее. Первая формула (6.29) означает, что прямая L параллельна плоскости P. Вторая формула (6.29) гласит, что координаты (x_0, y_0, z_0) не удовлетворяют уравнению плоскости P, т.е. точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, являющаяся одной из точек прямой L, не лежит в плоскости P. Таким образом, прямая L параллельна плоскости P и расположена на некотором расстоянии от неё:

2) Пусть

$$\left.\begin{array}{l}Al+Bm+Cn=0,\\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0,\end{array}\right\} \tag{6.30}$$

В этом случае для t_1 получается неопределенное значение, и, следовательно формула (6.28) даёт любую точку прямой L. Геометрически это означает, что прямая L параллельна плоскости P и точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ данной прямой лежит в плоскости P. В этом случае прямая L целиком лежит в плоскости P, т.е. каждая её точка есть общая точка с плоскостью. Таким образом, *условия (6.30)суть условия лежания прямой в плоскости.*

Замечание 6.5. Условие параллельности прямой и плоскости включает и ту возможность, когда прямая лежит в плоскости и не позволяет отличить этого случая.

Задача 6.10. Найти проекцию точки $M(11{,}17,-9)$ на плоскость P

$$5x+8y-6z+5=0.$$

Р е ш е н и е. Составим уравнение прямой, проходящей через точку М перпендикулярно плоскости P.

Уравнение прямой, проходящей через точку M, имеет вид:

$$\frac{x-11}{l}=\frac{y-17}{m}=\frac{z+9}{n}.$$

На основания условий перпендикулярности прямой и плоскости $\left(\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}\right)$ можно в уравнения прямой вместо коэффициентов l,m,n подставить пропорциональные им величины A,B,C:

$$L:\quad \frac{x-11}{5}=\frac{y-17}{8}=\frac{z+9}{-6}$$

Для нахождения проекции M_1 точки M на плоскость надо найти точку пересечения плоскости P и прямой L. По формулам (6.28) определяем:

$$t_1=-\frac{5\cdot 11+8\cdot 17+(-6)\cdot(-9)+5}{5^2+8^2+(-6)^2}=-\frac{250}{125}=-2;$$

Отсюда, координаты точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ определяются по формулам:

$$x=x_0+t_1 l=11-2\cdot 5=1,$$
$$y=y_0+t_1 m=17-2\cdot 8=1,$$
$$z=z_0+t_1 n=-9-2\cdot(-6)=3,$$

т.е. $M_1(1;1;3)$.

§ 6.8. Условие расположения двух прямых в одной плоскости

Пусть даны две прямые:

$$(L_1)\qquad \frac{x-a_1}{l_1}=\frac{y-b_1}{m_1}=\frac{z-c_1}{n_1};$$

$$(L_2)\qquad \frac{x-a_2}{l_2}=\frac{y-b_2}{m_2}=\frac{z-c_2}{n_2}.$$

На прямой L_1 лежит точка $M_1(a_1,b_1,c_1)$, а на прямой L_2-точка $M_2(a_2,b_2,c_2)$. Обозначим направляющий вектор первой прямой L_1 через $\boldsymbol{a_1}(l_1,m_1,n_1)$, а второй L_2 - через $\boldsymbol{a_2}(l_2,m_2,n_2)$.

Радиус-вектор прямой L_1 обозначим через $\boldsymbol{r_1}$, а второй L_2 через $\boldsymbol{r_2}$.

Посмотрим, при каком условии две прямые L_1 и L_2 лежат в одной плоскости.

Проведём вектор из точки $M_1(a_1,b_1,c_1)$ в точку $M_2(a_2,b_2,c_2)$ (Рис.6.7). Он выразится

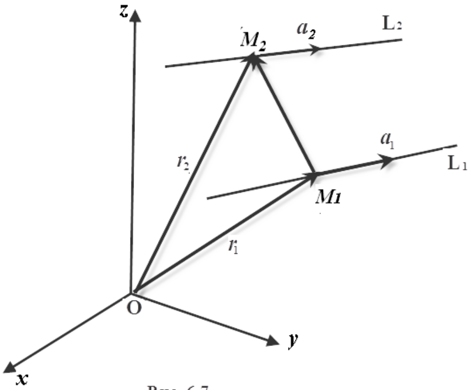


Рис. 6.7

так: $\boldsymbol{r_2}-\boldsymbol{r_1}$, а проекциями его будут a_2-a_1, b_2-b_1 и c_2-c_1.

Из геометрических соображений ясно, что данные прямые лежат в одной плоскости в том и только в том случае, если эти три вектора $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$ и $\boldsymbol{r_2}-\boldsymbol{r_1}$ компланарны и обратно. А для этого необходимо и достаточно, чтобы смешанное произведение этих трёх векторов было равно нулю, т.е.

$$\left((\boldsymbol{r_2}-\boldsymbol{r_1})\boldsymbol{a_1}\boldsymbol{a_2}\right)=\boldsymbol{0}.$$

Переписав это условие в проекциях, получим:

$$\begin{vmatrix} a_2-a_1 & b_2-b_1 & c_2-c_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0 \qquad (6.31)$$

Задача 6.11. Пересекаются ли две прямые:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{-4} \quad \text{и} \quad \frac{x-9}{6}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{1}.$$

Р е ш е н и е.

$$\begin{vmatrix} 9-1 & 2+2 & -1-2 \\ 2 & 1 & -4 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 8 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & -4 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Следовательно, прямые пересекаются.

Задача 6.12. Через точку $M(1;0;7)$ параллельно плоскости $3x-y+2z-15=0$ провести прямую так, чтобы она пересекала прямую $\frac{x-1}{4}=\frac{y-3}{2}=\frac{z}{1}$.

Р е ш е н и е. Уравнения искомой прямой, проходящей через точку $M(1;0;7)$, суть:

$$\frac{x-1}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z-7}{n}.$$

Из условии параллельности прямой с плоскостью, имеем: $3l-m+2n=0$. Поскольку вторая прямая проходит через точку $N(1;3;0)$, тогда вектор $\boldsymbol{MN}$ будет иметь координаты $(0;3;-7)$. Согласно формуле (6.31), получим:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & -7 \\ 4 & 2 & 1 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0 \quad \text{или } 17l-28m-12n=0.$$

Остаётся определить отношение $l:m:n$ из двух уравнений $17l-28m-12n=0$ и $3l-m+2n=0$, разделив каждое из этих уравнений на n, находим:

$$\frac{l}{m}=-\frac{68}{67}, \quad \frac{m}{n}=-\frac{70}{67}; \text{ т.е. } l:m:n=68:70:(-67).$$

Подставляя в уравнения искомой прямой вместо l, m, n, соответственно $68, 70, (-67)$, получим уравнение данной прямой:

$$\frac{x-1}{68} = \frac{y}{70} = \frac{z-7}{-67}.$$

Проверка: Подставляя найденные значения l, m и n в равенстве $3l - m + 2n = 0.$ убеждаемся, что полученная прямая параллельна плоскости

$$3x - y + 2z - 15 = 0.$$

§ 6.9. Уравнение пучка плоскостей

Через всякую прямую в пространстве можно провести бесчисленное множество плоскостей. Совокупность всех плоскостей, проходящих через одну и ту же прямую, называется *пучком плоскостей.*

Пусть уравнение данной прямой суть:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \tag{6.32}$$

Составим уравнение первой степени:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \tag{6.33}$$

которое при любом значении постоянного λ определяет плоскость. Если точка лежит на данной прямой линии, то её координаты одновременно удовлетворяют обоим уравнениям прямой (6.32) и, следовательно, уравнению (6.33) при любом значении λ. Уравнение (6.33) называется *уравнением пучка плоскостей,* проходящих через прямую (6.32). Число λ называется *параметром пучка.*

Пусть $M_1(x_1; y_1; z_1)$ - точка, лежащая вне данной прямой линии (6.32). Значение постоянной λ, соответствующей плоскости (6.33), найдётся из условия:

$$A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1 + \lambda(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2z_1 + D_2) = 0,$$

если только $A_2x_1 + B_2y_1 + C_2z_1 + D_2 \neq 0.$

Таким образом, уравнение (6.33) определяет все плоскости пучка, кроме второй образующей, именно $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$

Задача 6.13. Найти проекцию прямой

$$L: \quad \begin{cases} x + y - 4z - 18 = 0, \\ 2x - y + 10z + 21 = 0 \end{cases}$$

на плоскость P: $\quad x - 2y + 3z - 5 = 0.$

Р е ш е н и е. Составим уравнение пучка плоскостей, проходящих через прямую L:

$$x+y-4z-18+\lambda(2x-y+10z+21)=0, \qquad (6.33)$$

или

$$(1+2\lambda)x+(1-\lambda)y-(4-10\lambda)z-(18-21\lambda)=0.$$

Из этого пучка плоскостей выделим плоскость, проектирующую прямую L на плоскость P. Определим λ, используя условие перпендикулярности плоскостей:

$$1\cdot(1+2\lambda)-2\cdot(1-\lambda)-3\cdot(4-10\lambda)=0,$$

откуда $\lambda=\frac{13}{34}$. Подставляя значение λ в уравнение (6.33), найдём уравнение проектирующей плоскости Q:

$$x+y-4z-18+\frac{13}{34}(2x-y+10z+21)=0.$$

или $60x+20y-6z+339=0.$

Уравнение искомой проекции L_1 можно записать как уравнение линии пересечения плоскостей P и Q:

$$L_1: \qquad \begin{cases} x-2y+3z-5=0, \\ 60x+20y-6z+339=0. \end{cases}$$

Задача 6.14. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $3x+y+5z-12=0$, $2x-3y+z+8=0$ и отсекающей на осях Oy и Oz равные отрезки.

Р е ш е н и е. Уравнение пучка плоскостей, проходящей через линию пересечения двух данных плоскостей, имеет вид:

$$3x+y+5z-12+\lambda(2x-3y+z+8)=0,$$

или $(3+2\lambda)x+(1-3\lambda)y+(5+\lambda)z-(12-8\lambda)=0.$

Запишем это уравнение в отрезках:

$$\frac{(3+2\lambda)x}{12-8\lambda}+\frac{1-3\lambda}{12-8\lambda}y+\frac{5+\lambda}{12-8\lambda}z=1,$$

или $$\frac{x}{\frac{12-8\lambda}{3+2\lambda}}+\frac{y}{\frac{12-8\lambda}{1-3\lambda}}+\frac{z}{\frac{12-8\lambda}{5+\lambda}}=1.$$

Согласно условию задачи, отрезки, отсекаемые на осях Oy и Oz, равны, т.е.

$$\frac{12-8\lambda}{1-3\lambda}=\frac{12-8\lambda}{5+\lambda}, \qquad 5+\lambda=1-3\lambda, \quad \lambda=-1.$$

Таким образом, искомым уравнением плоскости является уравнение:

$$(3-2)x+(1+3)y+(5-1)z-(12+8)=0,$$

откуда $x+4y+4z-20=0.$

Ответ: $x+4y+4z-20=0.$

Примеры решения задач

Пример 1. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $C(2;-1;3)$ параллельно вектору $\boldsymbol{S}=(3;4;5)$.

Р е ш е н и е. Подставляя заданные условия в канонические уравнения прямой (6.8), получим

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-3}{5}.$$

Пример 2. Составить уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(-1;2;3)$ и $M_2(2;6;-2)$ и найти её направляющие косинусы.

Р е ш е н и е. Очевидно, вектор $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{M_1M_2}=(3;4;-5)$ является направляющим для данной прямой. Подставляя в формулу (6.8) координаты вектора $\boldsymbol{S}$ и координаты точки M_1 вместо значений x_1, y_1 и z_1, запишем канонические уравнения искомой прямой:

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{-5}.$$

С тем же основанием можно было подставить координаты точки M_2, ибо уравнения

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y-6}{4}=\frac{z+2}{-5}$$

определяет ту же прямую.

Теперь найдём модуль вектора $\boldsymbol{M_1M_2}$

$$|\boldsymbol{S}|=|\boldsymbol{M_1M_2}|=\sqrt{9+16+25}=5\sqrt{2}$$

и направляющие косинусы прямой:

$$\cos\alpha=\frac{X}{|s|}=\frac{3}{5\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{10};\quad \cos\beta=\frac{Y}{|s|}=\frac{4}{5\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{5};$$

$$\cos\gamma=\frac{Z}{|s|}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Пример 3. Привести к каноническому виду уравнения прямой

$$\begin{cases}2x+3y-16z=7,\\ 3x+y-17z=0.\end{cases}$$

Р е ш е н и е. П е р в ы й с п о с о б. Исключив сначала x, а затем y, получим

$$x-5z+1=0 \text{ и } y-2z-3=0.$$

Если разрешим каждое из уравнений относительно z, то будем иметь

$$z=\frac{x+1}{5},\quad z=\frac{y-3}{2},$$

откуда

$$\frac{x+1}{5}=\frac{y-3}{2}=\frac{z}{1}.$$

В т о р о й   с п о с о б. Найдём вектор $\boldsymbol{S}=l\boldsymbol{i}+m\bar{\boldsymbol{j}}+n\boldsymbol{k}$, параллельный искомой прямой. Так как он должен быть перпендикулярен к нормальным векторам заданных плоскостей $\boldsymbol{n_1}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-16\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{n_2}=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-17\boldsymbol{k}$, то за него можно принять векторное произведение векторов $\boldsymbol{n_1}$ и $\boldsymbol{n_2}$

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{n_1}\times\boldsymbol{n_2}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & 3 & -16\\ 3 & 1 & -17\end{vmatrix}=-35\boldsymbol{i}-14\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}.$$

В качестве направляющего вектора прямой можно взять вектор $\boldsymbol{S_1}=-\frac{1}{7}\boldsymbol{S}=5\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, который в 7 раз короче полученного вектора $\boldsymbol{S}$. Таким образом, $l=5, m=2, n=1$.

За точку $M_1(x_1;y_1;z_1)$, через которую проходит искомая прямая, можно принять точку пересечения её с любой из координатный плоскостей, например, с плоскостью XOY. Так как при этом $z_1=0$, то координаты x_1 и y_1 этой точки определяются из системы уравнений заданных плоскостей, если в них положить $z=0$:

$$\begin{cases}2x+3y-7=0,\\ 3x+y \qquad =0.\end{cases}$$

Решая эту систему, находим $x=-1$, $y=-3$. Итак, искомая прямая определяется уравнениями:

$$\frac{x+1}{5}=\frac{y-3}{2}=\frac{z}{1}.$$

Мы получим прежний ответ.

Пример 4. Привести к параметрическому виду уравнения прямой

$$\begin{cases}x+2y+3z-26=0,\\ 3x+y+4z-14=0.\end{cases}$$

Р е ш е н и е. От общих уравнений прямой перейдём к каноническому виду.

Решая данные уравнения относительно x, и y, найдём уравнения в проекциях:

$$x=-z+\frac{2}{5}, \qquad y=-z+\frac{64}{5}.$$

Выражаем из этих уравнений z:

$$-z=x-\frac{2}{5} \qquad -z=y-\frac{64}{5}$$

и получаем канонические уравнения прямой:

$$\frac{5x-2}{+5}=\frac{5y-64}{+5}=\frac{Z}{-1}.$$

Обозначая эти отношения через t:

$$\frac{5x-2}{+5}=t,\quad \frac{5y-64}{+5}=t,\quad \frac{z}{-1}=t,$$

получим параметрические уравнения этой прямой:

$$\begin{cases} x=t+\frac{2}{5}, \\ y=t+\frac{64}{5}, \\ z=-t. \end{cases}$$

Пример 5. Построить прямые и найти их направляющие векторы:

$$a)\ \begin{cases} x=3, \\ y=4. \end{cases} \qquad б)\ \begin{cases} y=3, \\ z=x+2. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. а). Прямая задана как пересечение плоскостей $x=3$, и $y=4$, следовательно, она параллельна оси Oz (Рис. 6.8 а). В качестве направляющего вектора можно взять, например, вектор $\boldsymbol{S_1}=\{0;0;1\}$.

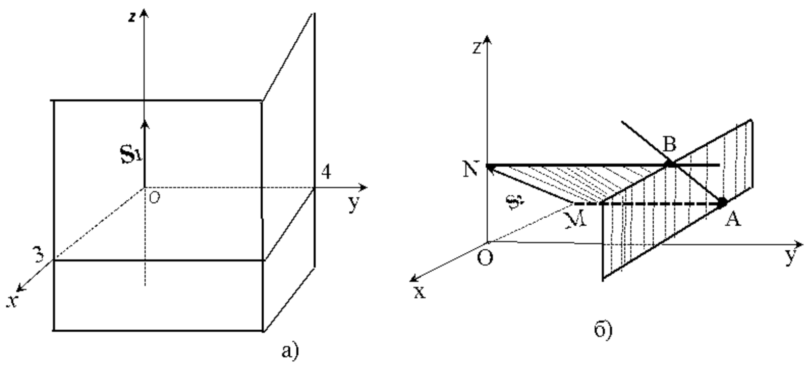


Рис 6.8

б). Искомая прямая-линия пересечения плоскостей $y=3$, и $z=x+2$.

Поскольку в уравнении плоскости $z=x+2$ отсутствует текущая координата y, плоскость параллельна оси Oy. Она пересекает координатные оси Ox и Oz в точках $M(-2;0;0)$ и $N(0;0;2)$ (Рис. 6.8 б).

Заданные плоскости пересекаются по прямой AB, параллельной MN. Значит, направляющим вектором искомой прямой может служить, например, вектор $\boldsymbol{S_2}=\boldsymbol{MN}=\{-2;0;2\}$. Очевидно, что $\boldsymbol{MN}=\boldsymbol{AB}$.

Пример 6. Составить уравнения прямой в пространстве, проходящей через точку $M(-2;-3;1)$ и пересекающей ось Oy под прямым углом.

Р е ш е н и е. Так как прямая пересекает ось Oy под прямым углом, то она проходит через точку $N(0;-3;0)$- проекции точки M на эту ось. Её направляющий вектор $\boldsymbol{MN}=(2;0;-1)$. Канонические уравнения данной прямой в этом случае имеют вид:

$$\frac{x+2}{2}=\frac{y+3}{0}=\frac{z-1}{-1}.$$

Поэтому вместо канонических уравнений прямой можно записать систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{z-1}{-1}, \\ y = -3. \end{cases}$$

Данная система определяет общее уравнения прямой.

Пример 7. Доказать параллельность прямых:

$$\begin{aligned} x &= -6t + 1, \\ y &= -3t + 2, \\ z &= +2t - 7 \end{aligned} \qquad \text{и} \qquad \begin{cases} x - 6y - 6z + 2 = 0, \\ 2x + 2y + 9z - 1 = 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Первая прямая задана параметрическими уравнениями. Перей-дём от параметрического задания прямой к каноническому. Для этого выразим параметр t из каждого уравнения и приравниваем выражения.

$$\frac{x-1}{-6} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+7}{2}.$$

Таким образом, направляющий вектор первой прямой $\boldsymbol{S_1} = \{-6; -3; 2\}$.

Вторая прямая задана как линия пересечения двух плоскостей. Её направляющий вектор $\boldsymbol{S_2}$ перпендикулярен к нормальным векторам заданных плоскостей $\boldsymbol{n_1} = \{1; -6; -6\}$ и $\boldsymbol{n_2} = \{2; 2; 9\}$.

Чтобы доказать параллельность прямых, достаточно доказать параллельность их направляющих векторов, т.е. $\boldsymbol{S_1} \parallel \boldsymbol{S_2}$. Поэтому в качестве направляющего вектора $\boldsymbol{S_2}$ можно взять векторное произведение векторов $\boldsymbol{n_1}$ и $\boldsymbol{n_2}$:

$$\boldsymbol{S_2} = \boldsymbol{n_1} \times \boldsymbol{n_2} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -6 & -6 \\ 2 & 2 & 9 \end{vmatrix} = -42\boldsymbol{i} - 21\boldsymbol{j} + 14\boldsymbol{k},$$

$\boldsymbol{S_2} = \{-42; -21; 14\}$.

Если направляющие векторы прямых коллинеарны, то эти прямые параллельны. В нашем случае

$$\frac{-42}{-6} = \frac{-21}{-3} = \frac{14}{2},$$

следовательно, заданные прямые параллельны.

Пример 8. Определить косинус угла между прямыми:

$$\begin{cases} x = +2t + 7, \\ y = -t + 3, \\ z = t + 5, \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+8}{4}.$$

Р е ш е н и е. Из параметрических уравнений первой прямой определим координаты её направляющего вектора $\boldsymbol{S_1} = \{2; -1; 1\}$. Направляющий вектор второй прямой фактически задан канонической формой: $\boldsymbol{S_2} = \{1; -2; 4\}$.

Искомый угол между прямыми определим по следующей известной формуле:

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{s_1}\cdot\boldsymbol{s_2}}{|\boldsymbol{s_1}|\cdot|\boldsymbol{s_2}|} = \frac{+2\cdot1+(-1)\cdot(-2)+1\cdot4}{\sqrt{4+1+1}\cdot\sqrt{1+4+16}} = \frac{0}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{21}} = 0.$$

$\cos\varphi = 0$, следовательно, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, т.е. заданные прямые перпендикулярны.

Пример 9. Найти точку $M_2(x_2;y_2;z_2)$, симметричную точке $M_1(1;1;1)$ относительно прямой

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1{,}5}{-2} = \frac{z-1}{1}.$$

Р е ш е н и е. Уравнение плоскости, проведённой через точку $M_1(1;1;1)$ перпендикулярно данной прямой ($\boldsymbol{n} = \boldsymbol{s}$), есть $x - 2y + z = 0$. Находим точку M_3 пересечения проведенной плоскости с заданной прямой. Для этого, записав параметрические уравнения прямой $x = 2 + t$, $y = -1{,}5 - 2t$, $z = 1 + t$ и подставляя эти выражения в уравнение плоскости

$$(2 + t) - 2\cdot(-1{,}5 - 2t) + (1 + t) = 0,$$

находим $t = -1$. Следовательно, искомая точка есть $M_3(1;0{,}5;0)$. Координаты точки M_2 находятся из соотношении (деление отрезка пополам):

$$x_3 = \frac{x_1+x_2}{2},\quad y_3 = \frac{y_1+y_2}{2},\quad z_3 = \frac{z_1+z_2}{2},$$

и они равны $x_2 = 1$, $y_2 = 0$, $z_2 = -1$.

Пример 10. Даны вершины треугольника $A(1;1;1)$, $B(2;3;4)$ и $C(4;3;2)$. Составить параметрические уравнения биссектрисы его внутреннего угла при вершине A.

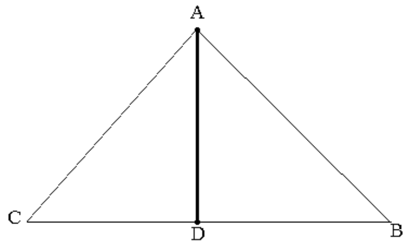


Рис. 6.9

Р е ш е н и е. Как известно, биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположенную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам $\frac{CD}{DB} = \frac{AC}{AB} = \lambda$, т.е.

$$|AC| = \sqrt{(4-1)^2 + (3-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}.$$

$$|AB| = \sqrt{(2-1)^2 + (3-1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}.$$

Следовательно, $\lambda = 1$. Применяя формулы деления отрезка в данном отношении, найдём координаты точки D:

$$x_D = \frac{x_C+\lambda x_B}{1+\lambda} = \frac{4+2}{2} = 3;\quad y_D = \frac{y_C+\lambda y_B}{1+\lambda} = \frac{3+3}{2} = 3;$$

$$z_D = \frac{z_C+\lambda z_B}{1+\lambda} = \frac{4+3}{2} = \frac{7}{2}.$$

т.е. $D\left(3;3;\frac{7}{2}\right)$. Тогда $\boldsymbol{AD}=\left\{2;2;\frac{5}{2}\right\}$ –направляющая для биссектрисы AD (Рис. 6.9).

Составим канонические уравнения прямой AD :

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{5/2} \quad \text{или} \quad \frac{x-1}{4}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-1}{5}.$$

Выражая x, y, и z через t, получим параметрические уравнения биссектрисы

$$AD: \quad \begin{cases} x=1+4t, \\ y=1+4t, \\ z=1+5t. \end{cases}$$

Пример 11. В уравнениях прямой

$$\frac{x-2}{l}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-3}{5}$$

определить параметр l так, чтобы эта прямая пересекалась с прямой $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+7}{8}$. Найти точку пересечения.

Р е ш е н и е. Направляющие векторы прямых равны $\boldsymbol{S_1}=\{l;4;5\}$ и $\boldsymbol{S_2}=\{-1;3;8\}$. Точка $A(2;-1;3)$ лежит на первой прямой, точка $B(1;2;-7)$ –на второй прямой. Если прямые пересекаются, значит, векторы $\boldsymbol{S_1}$, $\boldsymbol{S_2}$ и $\boldsymbol{AB}$ компланарны.

Используя условие компланарности трёх векторов, имеем:

$$(\boldsymbol{S_1}\times\boldsymbol{S_2})\cdot\boldsymbol{AB}=\begin{vmatrix} l & 4 & 5 \\ -1 & 3 & 8 \\ -1 & 3 & -10 \end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow \quad l=-\frac{4}{3}.$$

С учётом найденного значения параметра l запишем канонические уравнения первой прямой: $\frac{x-2}{-4}=\frac{y+1}{12}=\frac{z-3}{15}$.

Для нахождения координат точки пересечения двух прямых следует совместно решить их уравнения:

$$\begin{cases} \frac{x-2}{-4}=\frac{y+1}{12}=\frac{z-3}{15}, \\ \frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+7}{8}. \end{cases}$$

Простейшей способ решения данной системы, способ подстановки. Выразим из уравнения $\frac{y-2}{3}=\frac{z+7}{8}$ переменную y через z:

$y = \frac{1}{8} \cdot (3z + 37)$. Подставим это выражение в равенство $\frac{y+1}{12} = \frac{z-3}{15}$. Отсюда

$$\frac{1}{5}(4z - 17) = \frac{1}{8}(3z + 37) \to z \approx 18{,}8.$$

Теперь по известному значению z находим y и x: $y \approx 11{,}7$; $x \approx -2{,}23$. Следовательно, точка пересечения заданных прямых имеет координаты $M(-2{,}23; 11{,}7; 18{,}8)$.

Пример 12. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямые:

$$L_1: \frac{x-9}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-2}, \qquad L_2: \frac{x+5}{3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-1}{-2}.$$

Р е ш е н и е. Обозначим точки, через которые проходят прямые L_1 и L_2- $M_1(9; 0; 2)$, $M_2(-5; -5; 1)$. Им соответствует вектор

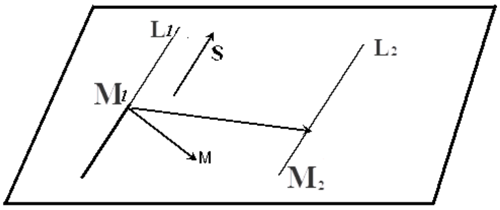


Рис.6.10

$\boldsymbol{M_1M_2} = \{-14; -5; -1\}$ (Рис.6.10).

Возьмём на искомой плоскости точку $M(x; y; z)$ с текущими координатами, получим вектор $\boldsymbol{M_1M} = \{x - 9; y; z - 2\}$. Таким образом, три вектора $\boldsymbol{M_1M}$, $\boldsymbol{M_1M_2}$ и направляющий вектор прямой $\boldsymbol{S}\{3; 2; -2\}$ компланарны. По условию компланарности трёх векторов имеем:

$$\begin{vmatrix} x-9 & y & z-2 \\ -14 & -5 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \text{ или } \quad 12x - 31y - 13z - 82 = 0.$$

О т в е т: $\quad 12x - 31y - 13z - 82 = 0$.

Пример 13. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(-6; 1; -5)$, и параллельно прямым:

$$L_1: \frac{x}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-1}{-3} \text{ и } L_2: \frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{-8} = \frac{z+1}{-6}.$$

Р е ш е н и е. Уравнение всякой плоскости, проходящей через данную точку $M_1(-6; +1; -5)$ имеет вид:

$$A(x + 6) + B(y - 1) + C(z + 5) = 0. \tag{1}$$

Искомая плоскость параллельна данным прямым L_1 и L_2, поэтому, применяя условия параллельности прямой и плоскости, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} 1 \cdot A - 2 \cdot B - 3 \cdot C = 0, \\ 3 \cdot A - 8 \cdot B - 6 \cdot C = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{или} \quad \left.\begin{aligned} \frac{A}{C} - 2 \cdot \frac{B}{C} - 3 = 0, \\ 3 \cdot \frac{A}{C} - 8 \cdot \frac{B}{C} - 6 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Решая полученную систему уравнений, найдём:

$$\frac{A}{C} = 6, \qquad \frac{B}{C} = \frac{3}{2}.$$

Делим уравнения (1) на $C \neq 0$ и подставляем значения $\frac{A}{C}$ и $\frac{B}{C}$, получим:

$$6(x+6) + \frac{3}{2}(y-1) + z + 5 = 0$$

или $12x + 3y + 2z + 79 = 0$.

Приведем второе решение с целью проверки.

Пусть $M(x;y;z)$ - произвольная точка искомой плоскости. Тогда векторы $\boldsymbol{M_1M} = \{x+6; y-1; z+5\}$, $\boldsymbol{S_1}\{1;-2;-3\}$ и $\boldsymbol{S_2}\{3;-8;-6\}$ компланарны. Воспользовавшись условием компланарности, имеем:

$$\begin{vmatrix} x+6 & y-1 & z+5 \\ 1 & -2 & -3 \\ 3 & -8 & -6 \end{vmatrix} = 0 \text{ или } 12x + 3y + 2z + 79 = 0.$$

О т в е т. $12x + 3y + 2z + 79 = 0$.

Пример 14. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую:

$$\begin{cases} 3x + y - 4z + 2 = 0, \\ 4x + 2y - 2z - 7 = 0, \end{cases}$$

перпендикулярно плоскости $3x - 5y + z - 8 = 0$, $\boldsymbol{n} = \{3;-5;1\}$.

Р е ш е н и е. $\boldsymbol{n_1} = \{3;1;-4\}$, $\boldsymbol{n_2} = \{4;2;-2\}$.

Данная прямая действительно перпендикулярна данной плоскости:

$$\boldsymbol{n_1} \cdot \boldsymbol{n} = 3 \cdot 3 + 1 \cdot (-5) + (-4) \cdot 1 = 0,$$
$$\boldsymbol{n_2} \cdot \boldsymbol{n} = 4 \cdot 3 + 2 \cdot (-5) + (-2) \cdot 1 = 0.$$

Следовательно, условию задачи будут удовлетворять все плоскости, принадлежащие пучку плоскостей, проходящих через эту прямую.

О т в е т: $\alpha(3x + y - 4z + 2) + \beta(4x + 2y - 2z - 7) = 0$.

Пример 15. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2;3;-5)$ и $M_2(1;-2;1)$ параллельно прямой L:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+3}{5}.$$

Р е ш е н и е. Возьмём на искомой плоскости точку с текущими координатами, получим вектор $\boldsymbol{M_1M} = \{x-2; y-3; z+5\}$. Векторы $\boldsymbol{M_1M}$, $\boldsymbol{M_1M_2} = \{-1;-5;6\}$ и $\boldsymbol{S} = \{2;-3;5\}$ компланарны. По условию компланарности трёх векторов $\boldsymbol{M_1M}$, $\boldsymbol{M_1M_2}$ и $\boldsymbol{S}$ имеем:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z+5 \\ -1 & -5 & 6 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad 7x - 17y - 13z - 28 = 0.$$

О т в е т: $7x - 17y - 13z - 28 = 0$.

Пример 16. Заданы плоскость $P\colon\ x+y-z+1=0$ и прямая L:

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1},\quad \text{причём}\quad L\in P.$$

Требуется найти:

а) угол между прямой и плоскостью;

б) координаты точек пересечения прямой и плоскости.

Р е ш е н и е. а) $\cos(\boldsymbol{S},\boldsymbol{n})=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\sin\varphi$;

$$\boldsymbol{S}=\{0;2;1\},\qquad \boldsymbol{n}=\{1;1;-1\}.$$

$$\operatorname{Sin}\varphi=\frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{S}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{0\cdot1+2\cdot1+1\cdot(-1)}{\sqrt{0+4+1}\cdot\sqrt{1+1+1}}=\frac{2-1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{15}}.$$

$$\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{15}}.$$

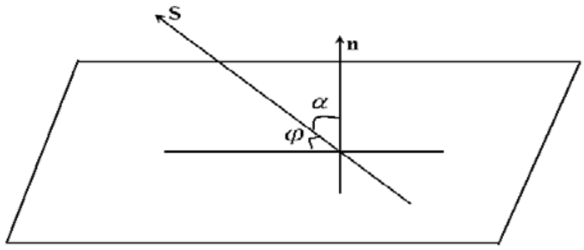


Рис 6.11

б) Найдём точку пересечения прямой и плоскости.

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}=t,$$

или параметрические уравнения

$$x=1,\ y=2t,\ z=t-1.$$

Подставим параметрические уравнения прямой в уравнение плоскости, найдём значение t: $1+2t-t+1+1=0$; $t=-3$. Тогда координаты точки пересечения прямой и плоскости будут: $x=1$, $y=-6$, $z=-4$ (Рис. 6.11).

О т в е т: $\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{15}}$, б) $(1;-6;-4)$.

Пример 17. Установить, лежит ли данная прямая в данной плоскости, параллельна плоскости или пересекает её:

Прямая	Плоскость
а) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{1}$,	$3x-y+2z+5=0$;
б) $\frac{x-2}{-2}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-1}{2}$,	$4x+2y+z+24=0$;
в) $\frac{x-2}{-1}=\frac{y+1}{4}=\frac{z+5}{2}$,	$4x+y-z=0$.

Р е ш е н и е. Условием того, что прямая лежит в плоскости, являются два равенства:

$$Al+Bm+Cn=0;\qquad Ax_0+By_0+Cz_0+D=0,$$

где A,B,C и D –коэффициенты общего уравнения плоскости;

x_0, y_0, z_0 –координаты точки, через которую проходит прямая;

l, m, n —направляющие коэффициенты прямой.

Если $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$, то прямая параллельна плоскости.

Если $Al + Bm + Cn \neq 0$, то прямая пересекает плоскость.

$$a)\ \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{1}, \quad \text{и} \quad 3x - y + 2z + 5 = 0,$$

$Al + Bm + Cn = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 7 \neq 0,$

прямая пересекает плоскость.

Найдем точку их пересечения. Для этого преобразуем канонические уравнения прямой в параметрические уравнения:

$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{1} = t,$ откуда $x = 2t + 1,\ y = t - 2,\quad z = t + 2.$

Подставим эти значения x, y и z в уравнения плоскости:

$$3(2t + 1) - (t - 2) + 2(t + 2) + 5 = 0,$$

откуда $t = -2,$ и $x = -3,\ y = -4,\ z = 0.$

Таким образом, прямая пересекает плоскость в точке $M(-3; -4; 0)$.

$$\text{б)}\ \frac{x-2}{-2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{2}, \quad \text{и} \quad 4x + 2y + z + 24 = 0.$$

$$Al + Bm + Cn = 4 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 0;$$

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 4 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 24 = 39 \neq 0,$$

прямая параллельна плоскости

$$\text{в)}\ \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z+5}{2}, \quad \text{и} \quad 4x + y - 7 = 0.$$

$$Al + Bm + Cn = 4 \cdot (-1) + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 = 0,$$

$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 4 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot (-5) - 7 = 0,$

прямая лежит в плоскости.

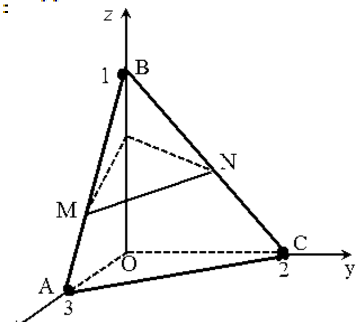


Рис. 6.12

О т в е т. а) прямая пересекает плоскость в точке $M(-3; -4; 0)$, б) прямая параллельна плоскости, в) прямая лежит в плоскости.

Пример 18. Треугольник ABC образован пересечением плоскости $2x + 3y + 6z - 6 = 0$ с координатными осями. Найти уравнение средней линии треугольника, параллельной плоскости xOy.

Р е ш е н и е. Найдём точки пересечения заданной плоскости с осями координат.

Записав уравнение искомой плоскости в отрезках, имеем: $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{1} = 1$. Откуда, $x = 3$; т.е. $A(3; 0; 0)$.

Аналогично, $z = 1$ и $B(0; 0; 1)$, $y = 2$ и $C(0; 2; 0)$.

Средняя линия треугольника это отрезок, соединяющий середины двух его сторон (Рис.6.12). Поэтому по формулам деления отрезка в данном отношении найдём координаты точек M и N:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{3+0}{2}=\frac{3}{2},\quad y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{0+0}{2}=0,$$

$$z_M=\frac{z_A+z_B}{2}=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2};\quad \Rightarrow M\left(\frac{3}{2};0;\frac{1}{2}\right).$$

$$x_N=\frac{x_C+x_B}{2}=\frac{0+0}{2}=0;\quad y_N=\frac{y_C+y_B}{2}=\frac{2+0}{2}=1;$$

$$z_N=\frac{z_C+z_B}{2}=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}\quad \Rightarrow N\left(0;1;\frac{1}{2}\right).$$

Находим координаты направляющего вектора прямой $\boldsymbol{MN}=\left\{-\frac{3}{2};1;0\right\}$.

Подставляя эти значения вектора $\boldsymbol{MN}$ и координаты точки M (либоN) в каноническое уравнение прямой, получим уравнение средней линии треугольника, лежащего в плоскости $z=\frac{1}{2}$;

$$\frac{x-\frac{3}{2}}{-\frac{3}{2}}=\frac{y}{1}=\frac{z-\frac{1}{2}}{0},\quad \text{или}\quad \frac{x-\frac{3}{2}}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z-\frac{1}{2}}{0}.$$

О т в е т: $\dfrac{x-\frac{3}{2}}{3}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-\frac{1}{2}}{0}$.

Пример 19. Показать, что прямая $L_1:\ \dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-4}{-3}$, параллельна плоскости P: $x-2y+z=0$, а прямая $L_2:\ \dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z+8}{-3}$ лежит в этой плоскости.

Р е ш е н и е. Направляющий вектор заданных прямых один и тот же $\boldsymbol{S}=\{5;1;-3\}$. Очевидно, если прямая параллельна плоскости, или лежит в плоскости, то её направляющий вектор $\boldsymbol{S}$ перпендикулярен нормальному вектору этой плоскости $\boldsymbol{n}=\{1;-2;1\}$. Убедимся в том, что условие перпендикулярности двух векторов, выполняется, т.е.:

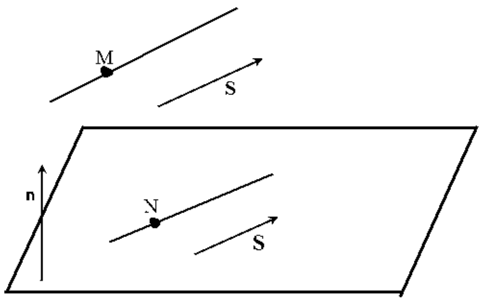


Рис. 6.13

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{S}=5\cdot 1+1\cdot(-2)+(-3)\cdot 1=5-2-3=0$$

$$\Rightarrow\ \boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{S}.$$

Действительно, обе прямые параллельны плоскости $x-2y+z=0$.

Теперь проверим, лежат ли заданные прямые в указанной плоскости. Для этого возьмём точку $M(2;-3;4)$, лежащую на первой прямой, и подставим её координаты в уравнение плоскости:

$$2\cdot 1+(-3)\cdot(-2)+4\cdot 1=12\neq 0.$$

Координаты точки M не удовлетворяют уравнению плоскости, значит, и первая прямая не лежит в плоскости.

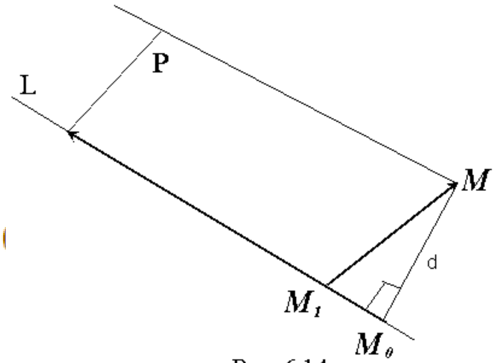


Рис. 6.14

Координаты точки $N(2;-3;-8)$ второй прямой удовлетворяют уравнению плоскости:

$2\cdot 1+(-3)\cdot(-2)+(-8)\cdot 1=2+6-8=0$, значит, точка N принадлежит заданной плоскости $x-2y+z=0$. Если хотя бы одна точка прямой L_2 $\dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z+8}{-3}$ принадлежит плоскости P, то и вся прямая L_2 лежит в этой плоскости, поскольку она ей параллельна (Рис. 6.13).

Пример 20. Найти расстояние от точки $M(3;5;5)$ до прямой $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z}{1}$.

Р е ш е н и е. Первый способ. Чтобы найти расстояние от точки M до прямой в пространстве, следует через данную точку провести плоскость, перпендикулярную заданной прямой. Затем надо найти точку M_0 пересечения прямой с плоскостью и определить расстояние между точками M и M_0.

Следуя этой схеме, составим уравнение плоскости P, проходящей через точку $M(3;5;5)$ перпендикулярно заданной прямой L (Рис.6.14). Нормальный вектор $\boldsymbol{n}$ плоскости P совпадает с направляющим вектором $\boldsymbol{S}$ прямой и равен $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{S}=\{-2;4;1\}$, значит, уравнение плоскости P имеет вид:

$$-2\cdot(x-3)+4\cdot(y-5)+1\cdot(z-5)=0\ \Rightarrow 2x-4y-z+19=0.$$

Для нахождения точки пересечения заданной прямой и плоскости P запишем параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x=-2t+1, \\ y=4t, \\ z=t. \end{cases}$$

Подставляя x,y,z в общее уравнение плоскости $\boldsymbol{P}$, определим параметр t:

$$2\cdot(-2t+1)-4\cdot 4t-1\cdot t+19=0\ \Rightarrow\ -21t+21=0\Rightarrow\ t=1.$$

Полученное значение параметра t подставим обратно в параметрические уравнения прямой, откуда и найдём координаты точки M_0 пересечения прямой $\boldsymbol{L}$ и плоскости $\boldsymbol{P}$: $M_0(-1;4;1)$.

Расстояние между точками M и M_0 определим как длину вектора $\boldsymbol{MM_0} = \{-4;-1;-4\}$:

$$|\boldsymbol{MM_0}| = \sqrt{16+1+16} = \sqrt{33}.$$

Второй способ. Из канонических уравнений заданной прямой $\boldsymbol{L}$ имеем координаты точки $M_1(1;0;0)$, лежащей на прямой $\boldsymbol{L}$. Построим вектор $\boldsymbol{M_1M} = \{-2;-5;-5\}$.

Рассмотрим параллелограмм, построенный на векторах $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{M_1M}$ (Рис.6.14). Опираясь на геометрический смысл векторного произведения, определим площадь параллелограмма $S_n = |\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{M_1M}|$. С другой стороны, $S_n = |\boldsymbol{S}|\cdot d$, где d –высота параллелограмма. Приравнивая левые части формул, определяющих одну и ту же величину, получим:

$$d = \frac{|\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{M_1M}|}{|\boldsymbol{S}|},$$

где $\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{M_1M} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -2 & 4 & 1 \\ -2 & -5 & -5 \end{vmatrix} = -15\boldsymbol{i} - 12\boldsymbol{j} + 18\boldsymbol{k}.$

$$|\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{M_1M}| = \sqrt{(-15)^2+(-12)^2+18^2} = \sqrt{225+144+324} = \sqrt{693}.$$

$$\boldsymbol{S} = \{-2;4;1\}, \quad |\boldsymbol{S}| = \sqrt{4+16+1} = \sqrt{21}.$$

Таким образом,

$$d = \frac{\sqrt{693}}{\sqrt{21}} = \sqrt{33}.$$

О т в е т: $d = \sqrt{33}$.

З а м е ч а н и е. Аналогично решается задача о нахождении расстояния между параллельными прямыми. На одной из прямых берётся фиксированная точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и находится кратчайшее расстояние от этой точки до второй прямой.

Пример 21. Найти точку Q, симметричную точке $P(3,-4,0)$ относительно плоскости $2x + y - 2z - 11 = 0$.

Р е ш е н и е. Рассмотрим ход решения задачи. Сначала через точку P проведём прямую, перпендикулярную данной плоскости. Затем найдем точку пересечения прямой с плоскостью. Эта точка является проекцией точки P на

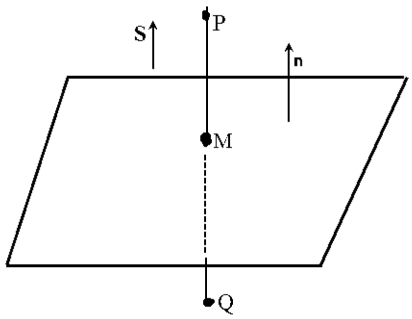


Рис. 6.15

плоскость и делит отрезок PQ пополам. Данное условие позволяет найти координаты точки Q.

Уравнение прямой, проходящей через точку $P(3,-4,0)$ перпендикулярно плоскости $2x+y-2z-11=0$ (Рис. 6.15), есть канонические уравнения прямой с направляющим вектором
$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{n}=\{2;1;-2\}$, т.е.

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y+4}{1}=\frac{z}{-2}.$$

Найдём точку пересечения M прямой и плоскости (см. пример 6.20):

$$\begin{cases} x=2t+3, \\ y=t-4, \\ z=-2t, \\ 2x+y-2z-11=0. \end{cases} \Rightarrow 2\cdot(2t+3)+1\cdot(t-4)-2\cdot(-2t)-11=0, \Rightarrow t=1.$$

Следовательно, $M(5;-3;-2)$.

Для определения координат точки Q по известным координатам точек P и M, где точки Q и P лежат на одной прямой и симметричны относительно точки M, воспользуемся формулами деления отрезка в данном отношении. Нам известны координаты середины отрезка $(x;y;z)=M(5;-3;-2)$ и координаты его начала $(x_1;y_1;z_1)=P(3;-4;0)$, т.е.

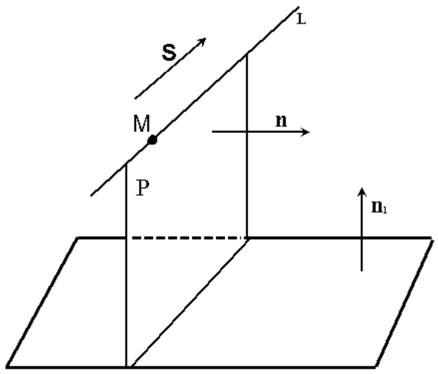


Рис. 6.16

$$5=\frac{3+x_2}{2};\quad -3=\frac{-4+y_2}{2};\quad -2=\frac{0+z_2}{2}.$$

Отсюда найдем координаты (x_2,y_2,z_2) конца отрезка, т.е. точку $Q(7,-2,-4)$ (Рис. 6.15).

О т в е т: $Q(7,-2,-4)$.

Пример 22. Найти уравнение проекции прямой $L:\ \frac{x}{5}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+1}{-3}$ на плоскость, заданную уравнением $2x-3y+z-4=0$.

Р е ш е н и е. Чтобы найти проекцию прямой на плоскость, нужно через данную прямую провести проектирующую плоскость $\boldsymbol{P}$, перпендикулярную заданной плоскости. Линия пересечения заданной и проектирующей плоскостей определит искомую проекцию.

Так как плоскость $\boldsymbol{P}$ проходит через данную прямую $\boldsymbol{L}$, то она проходит и через точку прямой $M(0;-1;-1)$ (Рис. 6.16). Учтем это обстоятельство в общем уравнении плоскости:

$$Ax + B(y+1) + C(z+1) = 0.$$

Нормальный вектор $\boldsymbol{n}$ проектирующей плоскости $\boldsymbol{P}$ перпендикулярен направляющему вектору прямой $\boldsymbol{S} = \{5;-2;-3\}$, и нормальному вектору заданной плоскости $\boldsymbol{n_1} = \{2;-3;1\}$, значит,

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{S} \times \boldsymbol{n_1} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 5 & -2 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -11x - 11y - 11z - 22 = 0.$$

В результате получаем уравнение плоскости $\boldsymbol{P}$.

$-11x - 11(y+1) - 11(z+1) = 0 \Rightarrow 11x + 11y + 11z + 22 = 0$

или $x + y + z + 2 = 0$.

Система уравнений

$$\begin{cases} 2x - 3y + z - 4 = 0, \\ x + y + z + 2 = 0 \end{cases}$$

определяет прямую, являющуюся проекцией прямой $\boldsymbol{L}$ на плоскость $2x - 3y + z - 4 = 0$.

О т в е т:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z - 4 = 0, \\ x + y + z + 2 = 0. \end{cases}$$

Пример 23. Заданы скрещивающиеся прямые:

$$L_1: \ \frac{x}{-2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+2}{1} \quad \text{и}$$

$$L_2: \ \frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}.$$

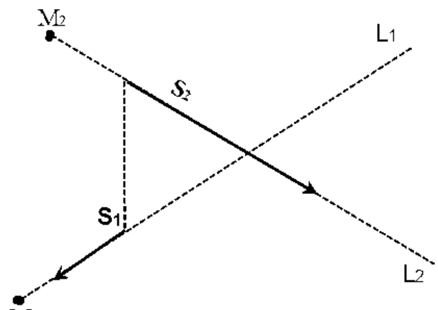


Рис. 6.17

Найти расстояние $d(L_1;L_2)$ между прямыми и написать уравнение общего перпендикуляра L к этим прямым.

Р е ш е н и е. 1). Найдём уравнение плоскости $\boldsymbol{P}$, проходящей через прямую $\boldsymbol{L_1}$, параллельную $\boldsymbol{L_2}$.

Точка $M_1(0,1,-2)$ лежит на прямой $\boldsymbol{L_1}$ и, следовательно, принадлежит искомой плоскости $\boldsymbol{P}$. В качестве нормального вектора к этой плоскости возьмём вектор:

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{S_1} \times \boldsymbol{S_2} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}.$$

Уравнение плоскости $\boldsymbol{P}\colon -2x-(y-1)-4(z+2)=0$ или $2x+y+4z+7=0$.

Расстояние $d(\boldsymbol{L_1};\boldsymbol{L_2})$ равно расстоянию от любой точки прямой $\boldsymbol{L_2}$, например, точки $M_2(-1;-1;2)$, до данной плоскости P

$$d=\frac{|2x_0+y_0+4z_0+7|}{\sqrt{4+1+16}}=\frac{|-2-1+8+7|}{\sqrt{21}}=\frac{12}{\sqrt{21}}.$$

2). Для того, чтобы составить уравнение общего перпендикуляра $\boldsymbol{L}$, найдем уравнение плоскостей $\boldsymbol{P_1}$ и $\boldsymbol{P_2}$ проходящих через заданные прямые $\boldsymbol{L_1}$ и $\boldsymbol{L_2}$ соответственно и перпендикулярных плоскости $\boldsymbol{P}$. Имеем: $M_1(0;1;-2)\in\boldsymbol{P_1}$ и

$\boldsymbol{n_1}=\boldsymbol{S_1}\times\boldsymbol{n}=(\boldsymbol{i}-10\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})\perp\boldsymbol{P_1}$, откуда $\boldsymbol{P_1}\colon\ x-10y+2z+14=0$. Аналогично,

$M_2(-1;-1;2)\in\boldsymbol{P_2}(\perp\boldsymbol{P})$ и $\boldsymbol{n_2}=\boldsymbol{S_2}\times\boldsymbol{n}=(-9\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})\perp\boldsymbol{P_2}$, откуда $P_2\colon\ 3x-2y-z+3=0$. Так как $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{P_1}\cap\boldsymbol{P_2}$, то

$$\begin{cases}x-10y+2z+11=0,\\3x-2y-z+3=0.\end{cases}$$

- общее уравнение прямой $\boldsymbol{L}$ (Рис. 6.17).

О т в е т: $d=\frac{12}{\sqrt{21}}$, $\begin{cases}x-10y+2z+11=0,\\3x-2y-z+3=0.\end{cases}$

Пример 24. При каких значениях B и D прямая $x-2y-z-9=0$, $3x+By+z+D=0$ лежит в плоскости xOy?

Р е ш е н и е. Если данная прямая лежит в плоскости xOy, то она пересекает ось Ox в некоторой точке $M(x_0;0;0)$, а ось Oy в точке $N(0;y_0;0)$. Подставляя координаты этих точек в уравнение заданной прямой, находим $B=-6; D=-27$.

Пример 25. Составить канонические уравнения прямой, которая проходит параллельно плоскостям $3x+12y-3z-5=0$, $3x-4y+9z+7=0$, и пересекает прямые:

$$\frac{x+5}{2}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+1}{3},\quad \frac{x-3}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{4}.$$

Р е ш е н и е. Пусть направляющий вектор искомой прямой есть $\boldsymbol{S}=\{l;m;n\}$. Так как искомая прямая параллельна двум плоскостям, то $\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n_1}=3l+12m-3n=0$ и $\bar{s}\cdot\overline{n_2}=3l-4m+9n=0$, где $\boldsymbol{n_1}$ и $\boldsymbol{n_2}$- нормаль-ные вектора заданных плоскостей. Таким образом, имеем систему двух уравнений для определения направляющего вектора искомой прямой

$$\begin{cases}3l+12m-3n=0,\\3l-4m+9n=0.\end{cases}$$

Отсюда находим $\frac{l}{n} = -2,\quad \frac{m}{n} = \frac{3}{4}$. Следовательно, за направляющий вектор искомой прямой можно взять вектор $\boldsymbol{S_0} = \left\{-2; \frac{3}{4}; 1\right\}$.

Если прямые пересекаются (а по условию задачи они пересекаются), то они лежат в одной плоскости. Составим уравнение плоскости, в которой лежат первая прямая с направляющим вектором $\boldsymbol{S_1} = \{2; -4; 3\}$ и искомая прямая. Уравнение это можно записать в виде смешанного произведения $(\boldsymbol{M_1M} \cdot [\boldsymbol{S_1} \times \boldsymbol{S_2}]) = 0$ или $25x + 32y + 26z + 55 = 0$, где $M(x; y; z)$ – текущая точка, $M_1(-5; 3; -1)$ –точка лежит на первой заданной прямой. Аналогично для второй плоскости, в которой лежат вторая заданная прямая и искомая

$$(\boldsymbol{M_1M_2} \cdot [\boldsymbol{S_1} \times \boldsymbol{S_2}]) = 0 \quad \text{или} \quad 4y - 3z + 10 = 0.$$

Эти две найденные плоскости, пересекаясь, определяют искомую прямую, её канонические уравнения имеют вид:

$$\frac{x+3}{8} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-2}{-4}.$$

О т в е т: $\begin{cases} 25x + 32y + 26z + 55 = 0, \\ 4y - 3z + 10 = 0 \end{cases}$

или

$$\frac{x+3}{8} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-2}{-4}.$$

Пример 26. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0, \\ 3x + 2y + 5z - 4 = 0 \end{cases}$$

и пересекающей другую прямую

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1} \text{ под углом } 30^0.$$

Р е ш е н и е. Напишем уравнение пучка плоскостей, проходящих через данную прямую в следующем виде:

$$x - 2y + 3z - 4 + \lambda(3x + 2y + 5z - 4) = 0$$

или $(1 + 3\lambda)x + (-2 + 2\lambda)y + (3 + 5\lambda)z - 4 - 4\lambda = 0.$ (1)

Воспользуемся формулой для нахождения угла между прямой и плоскостью:

$$\sin\varphi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \quad (2)$$

$$\sin\varphi = \sin 30^0 = \frac{1}{2};\ A = 1 + 3\lambda,\quad B = -2 + 2\lambda,\quad C = 3 + 5\lambda,$$

$$l = 3,\ m = -2,\ n = 1.$$

Подставив эти данные в формуле (2), получим уравнение с неизвестным λ:

$$\frac{1}{2}=\frac{3\cdot(1+3\lambda)-2\cdot(-2+2\lambda)+3+5\lambda}{\sqrt{(1+3\lambda)^2+(-2+2\lambda)^2+(3+5\lambda)^2}\cdot\sqrt{9+4+1}}$$

или

$$\frac{1}{2}=\frac{3\cdot(1+3\lambda)-2\cdot(-2+2\lambda)+3+5\lambda}{\sqrt{14+28\lambda+38\lambda^2}\cdot\sqrt{14}}$$

Решая это уравнение, найдём: .

$$7\cdot(7+14\lambda+19\lambda^2)=100(1+\lambda)^2,$$

или $33\lambda^2-102\lambda-51=0 \Rightarrow \lambda_1\approx-0{,}44;\ \lambda_2\approx 3{,}12.$

Подставляя найденное значение λ в пучок плоскостей (1), найдем уравнение искомой плоскости.

При $\lambda_1\approx-0{,}44$ имеем:

$$\big(1+3\cdot(-0{,}44)\big)x+\big(-2+2\cdot(-0{,}44)\big)y+\big(3-5\cdot(-0{,}44)\big)z-4-4\cdot0{,}44=0,$$

$$0{,}32x+1{,}12y-0{,}88z+2{,}24=0.$$

При $\lambda_2\approx 3{,}12$

$$(1+3\cdot3{,}12)x+(-2+2\cdot3{,}12)y+(3+5\cdot3{,}12)z-4-4\cdot3{,}12=0,$$

$$5{,}18x+2{,}12y+9{,}3z-8{,}24=0.$$

Таким образом, задача имеет решение только при $\lambda_1\approx-0{,}44$. Корень $\lambda_2\approx 3{,}12$ не удовлетворяет условию задачи.

О т в е т: $0{,}32x+1{,}12y-0{,}88z+2{,}24=0.$

Задачи для самостоятельного решения

6.1: Уравнения прямой $\begin{cases}x+2y+3z-13=0,\\3x+y+4z-14=0\end{cases}$ написать: 1) в проекциях; 2) в канонической форме.

6.2: Найти точки пересечения прямой

$$\begin{cases}2x+y-z-3=0,\\x+y+z-1=0\end{cases}$$

с координатными плоскостями.

6.3: Привести к каноническому виду уравнения прямой

$$\begin{cases}2x-3y-3z-9=0,\\x-2y+z+3=0.\end{cases}$$

6.4: Определить направляющие косинусы прямых

$$1)\ \frac{x-1}{4}=\frac{y-5}{-3}=\frac{z+2}{12};\qquad 2)\ \frac{x}{12}=\frac{y-7}{9}=\frac{z+3}{20}.$$

6.5: Даны три последовательные вершины параллелограмма $A\{3;0;-1\}$, $B\{1;2;-4\}$, и $C\{0;7;-2\}$. Найти уравнения сторон AD и CD.

6.6: Найти параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $M\,(2;-5;1)$ и $N\,(-1;1;2)$.

6.7: Найти угол между прямыми:

1) $\begin{cases} 3x-4y-2z=0, \\ 2x+y-2z=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 4x+y-6z-2=0, \\ y-3z+2=0. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x-y+z-4=0, \\ 2x+y-2z+5=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x+y+z-4=0, \\ 2x+3y-z-6=0. \end{cases}$

6.8: Составить канонические уравнения следующих прямых:

1) $\begin{cases} x-2y+3z-4=0, \\ 3x+2y-5z-4=0, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x+y+z=0, \\ 2x+3y-2z+5=0, \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x-2y+3z+1=0, \\ 2x+2y-4z-8=0. \end{cases}$

6.9: Доказать параллельность прямых:

1) $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1};$ и $\begin{cases} x+y-z=0, \\ x-y+5z-8=0; \end{cases}$

2) $x=2t+5, \quad y=-t+2, \quad z=6-t,$ и $\begin{cases} x+3y+z+2=0, \\ x-y-3z-2=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+y-3z+1=0, \\ x-y+z+3=0; \end{cases}$ и $\begin{cases} x+2y-5z-1=0, \\ x-2y+3z-9=0. \end{cases}$

6.10: Доказать перпендикулярность прямых:

1) $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{3};$ и $\begin{cases} 3x+y-5z+1=0, \\ 2x+3y-8z+3=0; \end{cases}$

2) $x=2t+1, \quad y=3t-2, \quad z=-6t+1$ и $\begin{cases} 2x+y-4z+2=0, \\ 4x-y-5z+4=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+y-3z-1=0, \\ 2x-y-9z-2=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x+y+2z+5=0, \\ 2x-2y-z+2=0. \end{cases}$

6.11: Найти острый угол между прямыми:

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{\sqrt{2}}, \qquad \frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{\sqrt{2}},$$

6.12: Написать уравнения прямой, проходящей через точки $A(-1;2;3)$ и $B(2;6;-2)$, и найти её направляющие косинусы.

6.13: Написать уравнения траектории точки $M(x;y;z)$, которая, выйдя из точки $A(4;-3;1)$, движется со скоростью $\vartheta\{2;3;1\}$.

6.14: Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M(-2;3;4)$ и перпендикулярной прямым:

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{2} \quad \text{и} \quad \frac{x}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{3}.$$

6.15: Составить канонические уравнения прямой, лежащей в плоскости xOy, проходящей через начало координат и перпендикулярной к прямой

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-4}{3}.$$

6.16: Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(1;-2;3)$ и перпендикулярной к прямым:

$$\frac{x-5}{3}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-3}{-2}\ , \qquad \frac{x+2}{2}=\frac{y+4}{-5}=\frac{z-1}{4}.$$

6.17: Найти расстояние от точки $M(-5;4;3)$ до прямой $\frac{x-2}{-1}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-1}{2}$.

6.18: Найти координаты точки пересечения прямых $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{4}$ и $\frac{x+2}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+2}{4}$.

6.19: Найти расстояние между скрещивающимися прямыми

$$\frac{x-5}{-2}=\frac{y-8}{0}=\frac{z-2}{3} \text{ и } \frac{x-3}{2}=\frac{y-7}{-2}=\frac{z-1}{3}.$$

6.20: При каком значении l пересекаются прямые:

$$\frac{x+2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z-1}{4} \text{ и } \frac{x-3}{l}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-7}{2}\ ?$$

6.21: Проверить принадлежит ли прямая $\frac{x+2}{3}=\frac{y-5}{4}=\frac{z}{1}$ плоскости $3x-2y-z+15=0$.

6.22: Найти точку пересечения прямой и плоскости:

1) $\frac{x-12}{4}=\frac{y-9}{3}=\frac{z-1}{1}$, $\quad 3x+5y-z-2=0;$

2) $\frac{x-7}{5}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-5}{4}$, $\quad 3x-y+2z-5=0;$

3) $\frac{x-13}{8}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{3}$, $\quad x+2y-4z+1=0.$

6.23: Даны вершины треугольника $A(1;-2;-4)$, $B(3;1;-3)$, и $C(5;1;-7)$. Составить параметрические уравнения его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC .

6.24: Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2;-3;-5)$ перпендикулярно к плоскости $6x-3y-5z+2=0$.

6.25: Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $N(1;-1;-1)$, перпендикулярно прямой $\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+2}{4}$.

6.26: При каких значениях m прямая $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{m}=\frac{z+3}{-2}$ параллельна плоскости $x-3y+6z+7=0$?

6.27: При каких значениях l прямая $3x-2y+z+3=0$ и $4x-3y+4z+1=0$ параллельна плоскости $2x-y+lz-2=0$?

6.28: При каких значениях l и C прямая $\frac{x-2}{l}=\frac{y+1}{4}+\frac{z-5}{-3}$ и плоскость $3x-2y+Cz+1=0$ перпендикулярны?

6.29: Найти проекцию точки $K(3;1;-1)$ на плоскость $x+2y+3z-30=0$.

6.30: Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M(3;1;-2)$. и точку пересечения прямой $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$ с плоскостью $2x-3y-5z-3=0$.

6.31: Прямая L проходит через точку $M(3;-4;0)$. и точку пересечения прямой $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z+1}{1}$ с плоскостью $x+y-z+2=0$. Найти величину угла, образованного прямой L с плоскостью $2x+y+2z-5=0$.

6.32: Плоскость P проходит через точки:

$$M_1(-6;1;-5), M_2(7;-2;-1), M_3(10;-7;1)$$

Найти точку, симметричную точке $K(3;-4;-6)$ относительно плоскости P.

6.33: Найти уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и образующей с плоскостью $\sqrt{2}\cdot x+y-z+2=0$ угол, равный $\dfrac{\pi}{4}$.

6.34: Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\begin{cases} 2x-y+z-3=0, \\ x+y-3z-1=0 \end{cases}$$

и отсекающей на оси Oy отрезок равный 3.

6.35: Найти расстояние между прямыми:

$$\frac{x-9}{-6}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{1} \quad \text{и} \quad \frac{x+5}{2}=\frac{y+5}{2}=\frac{z-1}{-2}.$$

6.36: Найти проекцию прямой $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-2}{-2}$ на плоскость $2x+3y-z-5=0$.

6.37: Найти точку Q симметричную точке $P(2;-5;7)$ относительно прямой, проходящей через точки $M_1(5;4;6)$ и $M_2(-2;-17;-8)$.

6.38: Составить уравнение плоскости, которая проходит через прямую пересечения плоскостей $2x+y-z+1=0$, $x+y+2z+1=0$, параллельно отрезку, ограниченному точками $M(2;5;-3)$, и $N(3;-2;2)$.

6.39: Написать уравнение плоскости, принадлежащей пучку плоскостей $\alpha(3x-4y+z+6)+\beta(2x-3y+z+2)=0$ и равноудалённой от точек $M(3;-4;-6)$, $N(3;-2;2)$.

6.40: На прямой $\begin{cases} x+2y+z-1=0, \\ 3x-y+4z-29=0 \end{cases}$ найти точку, одинаково удалённую от двух данных точек $M(3;11;4)$, и $N(-5;-13;-2)$.

Ответы

6.1: 1) $x=-z+3, \quad y=-z+5,$ 2) $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-5}{1}=\dfrac{z}{-1}$.

6.2: $(2;-1;0), \quad \left(\dfrac{4}{3};0;-\dfrac{1}{3}\right), \quad (0;2;-1).$

6.3: $\dfrac{x}{9}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z+3}{1}$.

6.4: 1) $\cos\alpha=\dfrac{4}{13},\ \cos\beta=\dfrac{3}{13},\ \cos\gamma=\dfrac{12}{13}.$ 2) $\cos\alpha=\dfrac{12}{25},\ \cos\beta=\dfrac{9}{25},\ \cos\gamma=\dfrac{20}{25}.$

6.5: $\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z+1}{2}. \quad -\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-7}{-2}=\dfrac{z+2}{3}$.

6.6: $x=-3t-1, \quad y=6t+1,\ z=t+2.$

6.7: 1) $\cos\varphi=\dfrac{98}{195}$, 2) $\cos\varphi=\dfrac{11}{26}$,

6.8: 1) $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{7}=\dfrac{z}{4}$, 2) $\dfrac{x}{-5}=\dfrac{y+1}{12}=\dfrac{z-1}{13}$, 3) $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{1}$,

6.11: $\cos\varphi=60^0$, **6.12:** $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-3}{-5}$,

$\cos\alpha=0{,}3\sqrt{2},\ \cos\beta=0{,}4\sqrt{2},\ \cos\gamma=-0{,}5\sqrt{2}.$

6.13: $\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z-1}{1}$, **6.14:** $\dfrac{x+2}{-5}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-4}{3}$,

6.15: $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{0}$, **6.16:** $\dfrac{x-1}{6}=\dfrac{y+2}{16}=\dfrac{z-3}{17}$.

6.17: $2\sqrt{10}$. **6.18:** $\left(\dfrac{5}{8};-\dfrac{11}{4};\dfrac{3}{2}\right)$ **6.19:** 2. **6.20:** $l=3$. **6.21:** Нет.

6.22: 1) $(0;0;-2)$, 2) $(2;3;1)$, 3) Прямая лежит в плоскости.

6.23: $x=3t+3,\ y=15t+1,\ z=19t-3.$ **6.24:** $\dfrac{x-2}{-6}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z+5}{5}$. **6.25:**
$2x-3y+4z-1=0.$

6.26: $m=-3$. **6.27:** $l=-2$. **6.28:** $l=-6;\ C=\dfrac{3}{2}$. **6.29:** $(5;5;5)$. **6.30:** $\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$.

6.31: $\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **6.32:** $S(1;-2;2)$. **6.33:** $y-z=0$.

6.34: $5x+2y-8z-6=0$. **6.35:** 7. **6.36:** $\dfrac{x}{-10}=\dfrac{y-3{,}4}{13}=\dfrac{z-5{,}2}{19}$. **6.37:** $Q(4;1;-3)$.

6.38: $9x+7y+8z+7=0$. **6.39:** $x-2y+z-2=0,\ x-5y+4z-20=0.$

6.40: $K(2;-3;5)$.

Глава VII

Поверхности второго порядка

§ 7. 1. Классификация поверхностей

Так же как и линии на плоскости, поверхности разделяются по их уравнениям в декартовой системе координат на алгебраические и трансцендентные. Уравнение алгебраической поверхности после преобразований может быть приведено к виду:

$$F(x, y, z) = 0, \tag{7.1}$$

где левая часть уравнения есть целый многочлен относительно x, y, z.

Множество точек $\mathrm{M}(x, y, z)$, координаты которых удовлетворяют уравнению вида:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz +$$

$$+a_{33}z^2 + a_{14}x + a_{24}y + a_{34}z + a_{44} = 0 \tag{7.2}$$

где a_{ij} $(i, j = 1,2,3,4)$ –действительные числа, называются *поверхностью второго порядка*. В общем случае *поверхностью* в R^3 называется множество точек $(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3$, удовлетворяющих уравнению (7.1). Степень данных уравнений относительно x, y, z даёт *порядок алгебраической поверхности.*

В данной главе в основном будем рассматривать *поверхности второго порядка,* т.е. поверхности, уравнения которых в прямоугольной системе координат являются *алгебраическими уравнениями второй степени.*

При рассмотрении вопроса о поверхностях могут быть поставлены две задачи:

1. Зная геометрические свойства поверхности, составить её уравнение.
2. Имея уравнение поверхности, определить её геометрические свойства.

Рассмотрим частные случаи поверхностей второго порядка задачи первого типа.

§ 7.2. Сфера

Сферой называется геометрическое место точек пространства $\boldsymbol{R}^3$, *равноудалённых от одной и той же точки, называемой центром сферы:*

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2, \tag{7.3}$$

где a, b, c –координаты центра сферы, а R –её радиус. Данное уравнение сферы получается из (7.2) при $a_{11} = a_{22} = a_{33} \neq 0, a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0.$

Если перенести начало координат в центр сферы, то уравнение её примет более простой вид (Рис. 7.1)

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Уравнение сферы содержит четыре независимых параметра: координаты центра и радиус. Из уравнения (7.2) при $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1$, $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$ получается общее уравнение сферы в виде:

$$x^2 + y^2 + z^2 + a_{14}x + a_{24}y + a_{34}z + a_{44} = 0. \qquad (7.4)$$

Уравнение (7.4) обладает той особенностью, что коэффициенты при квадратах координат равны между собой, а члены с произведениями координат отсутствуют. Обратно, если уравнение второй степени удовлетворяет этим двум условиям, то оно изображает сферу, и его можно привести к виду (7.3), дополняя до полных квадратов группы членов. содержащие одни и те же координаты. При этом для R^2 может получиться положительное, нулевое или отрицательное значение. В зависимости от этого сфера будет вещественная, нулевого радиуса (только одна действительная точка) или мнимая.

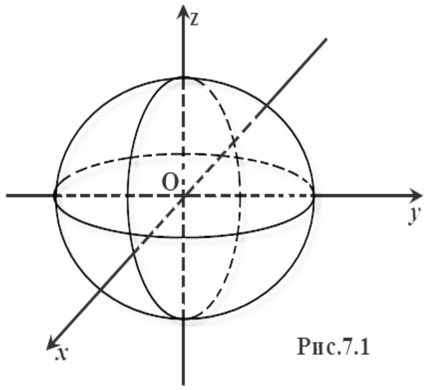


Рис.7.1

Со всякой прямой линией сфера имеет две общие точки (действительные или мнимые); если обе точки пересечения, сливаются, то прямая касается сферы, и тогда расстояние её от центра сферы равно радиусу.

Со всякой плоскостью сферическая поверхность пересекается по окружности (действительные или мнимые). Если плоскость находится от центра на расстоянии, равном радиусу, то линия пересечения обращается в круг нулевого радиуса (одна действительная точка); плоскость касается сферы, в ней лежат все прямые, касающиеся сферы в данной точке.

Плоскость, касающаяся сферы (7.3) в точке $M(x_1; y_1; z_1)$, имеет уравнение:

$$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) + (z_1 - c)(z - c) = R^2.$$

Если сфера отнесена к центру координат, то касательная плоскость изображается уравнением:

$$x \cdot x_1 + y \cdot y_1 + z \cdot z_1 = R^2.$$

Задача 1. Составить уравнение сферы радиуса $R = 8$ с центром в точке $C(1; 1; -1)$.

Р е ш е н и е. Подставляя в (7.3), $a = 1, b = 1, c = -1$ и $R = 8$, будем иметь:

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 64$$

или

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 2z - 61 = 0.$$

Задача 2. Сфера проходит через точку $M(4;2;2)$ и имеет центр в точке $C(1;-1;-1)$. Составить её уравнение.

Р е ш е н и е. Поскольку точка $M(4;2;2)$ лежит на сфере (7.3), у которой центр лежит в точке $C(1;-1;-1)$, то её координаты удовлетворяют искомому уравнению, т.е.

$$(4-1)^2+(2+1)^2+(2+1)^2=R^2,$$

откуда $R^2=27$. Таким образом, искомое уравнение имеет вид:

$$(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=27.$$

Задача 3. Сфера с центром в точке $C(0;4;0)$ касается плоскости $2x+6y-3z-3=0$.

Составить уравнение сферы.

Р е ш е н и е. Радиус сферы равен расстоянию центра C до касательной плоскости. По формуле расстояния точки до плоскости, имеем:

$$R=\frac{|2\cdot 0+6\cdot 4-3\cdot 0-3|}{\sqrt{4+36+9}}=\frac{21}{7}=3.$$

По формуле (7.3) находим уравнение сферы

$$x^2+(y-4)^2+z^2=9.$$

Задача 4. Найти центр и радиус окружности:

$$\begin{cases}(x-4)^2+(y-7)^2+(z+1)^2=36,\\ 3x+y-z-9=0.\end{cases}$$

Р е ш е н и е. Из центра сферы $C(4;7;-1)$ на плоскость P: $3x+y-z-9=0$ опустим перпендикуляр, уравнение которого можно записать в виде L:

$$\frac{x-4}{l}=\frac{y-7}{m}=\frac{z+1}{n}.$$

где L:

$$\frac{l}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}.\ (\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}=\{3;1;-1\}),$$

$\boldsymbol{s}$ – направляющий вектор прямой L, $\boldsymbol{n}$ – вектор – нормаль плоскости P.

Следовательно, уравнение перпендикуляра L имеют вид:

$$\frac{x-4}{3}=\frac{y-7}{1}=\frac{z+1}{-1}.$$

Теперь найдём координаты точки пересечения прямой L с плоскостью P. Эта точка будет центром окружности, являющейся сечением сферы данной плоскостью.

Запишем параметрические уравнения прямой L: $x=3t-4$, $y=t+7, z=-t-1$ и найдём t, подставляя x,y,z в уравнение плоскости P: $3\cdot(3t+4)+1\cdot(t+7)-1\cdot(-t-1)-9=0$, откуда $t=-1$.

Следовательно, координаты центра окружности будут $x = -7,\ y = 6,\ z = 0$, т.е. центр окружности находится в точке $C_1(-7;6;0)$.

Найдём теперь расстояние d от центра сферы $C(4;7;-1)$ до плоскости $3x + y - z - 9 = 0$:

$$d = \frac{|3\cdot 4 + 1\cdot 7 + 1 - 9|}{\sqrt{9+1+1}} = \frac{11}{\sqrt{11}} = \sqrt{11}\ .$$

Радиус окружности r определится из равенства $r^2 = R^2 - d^2$, где R – радиус сферы; таким образом, $r^2 = 36 - 11 = 25, r = 5$.

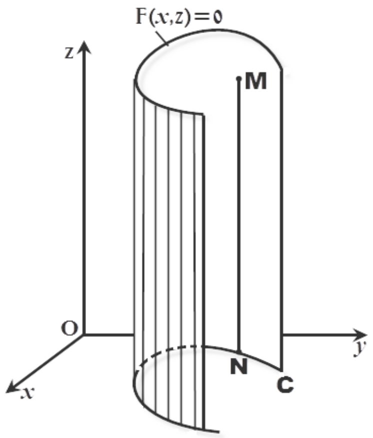


Рис. 7.2

§ 7.3. Цилиндрические поверхности

Цилиндрической поверхностью называется геометрическое место параллельных прямых, пересекающих данную линию. Эта линия называется *направляющей*, а параллельные прямые – *образующими*.

Цилиндрическая поверхность с образующими, параллельными данной прямой $\boldsymbol{L}$, может быть получена так: через каждую точку некоторой линии $\boldsymbol{C}$ проводится прямая, параллельная прямой $\boldsymbol{L}$, полученные прямые образуют цилиндрическую поверхность. Очевидно, что всякая линия на цилиндрической поверхности, пересекающая все образующие этой поверхности, является её направляющей.

Пусть в плоскости xOy лежит некоторая линия $\boldsymbol{L}$, уравнение которой

$$F(x,y) = 0. \qquad (7.5)$$

Построим цилиндр с образующими параллельными оси Oz и направляющей $\boldsymbol{C}$. Возьмём на цилиндре любую точку $M(x,y,z)$ (Рис. 7.2). Она лежит на какой – то образующей. Пусть $N(x,y,0)$ – точка пересечения этой образующей с плоскостью xOy. Следовательно, точка N лежит на кривой $\boldsymbol{C}$ и её координаты удовлетворяют уравнению (7.5).

Но точка M имеет такие же координаты x и y, как и точка N. Следовательно, уравнению (7.5) удовлетворяют и координаты точки $M(x,y,z)$, а z в уравнение (7.5) не входит. Геометрическое место вертикальных прямых NM и есть данная цилиндрическая поверхность. Координаты каждой её точки $M(x,y,z)$ удовлетворяют уравнению (7.5). Обратно, если координаты x и y

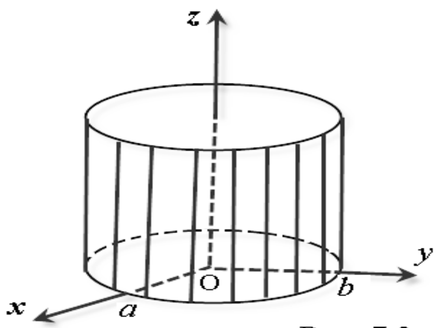


Рис. 7.3

точки $M(x,y,z)$ удовлетворяют уравнению (7.5), то точка M лежит на этой цилиндрической поверхности, так как она лежит на одной вертикали NM с направляющей $\boldsymbol{C}$.

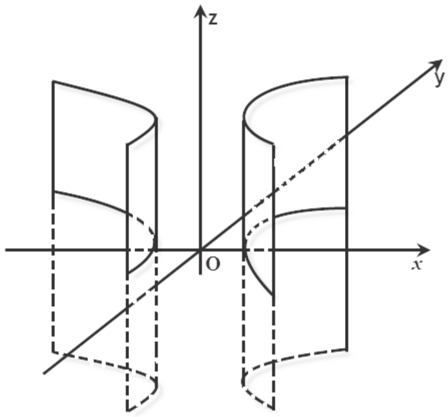


Рис. 7.4

Итак, уравнение $F(x,y)=0$, не содержащее z, определяет в пространстве цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси Oz и направляющей $\boldsymbol{C}$, которая в плоскости xOy имеет тоже самое уравнение (7.5). В пространстве линия $\boldsymbol{C}$ определится как пересечение цилиндрической поверхности с плоскостью $z=0$, т.е. определится системой двух уравнений

$$\left.\begin{array}{r} F(x,y)=0, \\ z=0. \end{array}\right\} \qquad (7.6)$$

Аналогично уравнения, не содержащие y или x, определяют цилиндрические поверхности :

$F(x,z)=0$ – с образующими, параллельными оси Oy,

$F(x,z)=0$ –с образующими, параллельными оси Ox,

Название цилиндра определяется названием направляющей. Если направляющей служит эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

в плоскости xOy, то соответствующая цилиндрическая поверхность называется *эллиптическим цилиндром* (Рис. 7.3). Частным случаем эллиптического цилиндра, является круговой цилиндр, его уравнение

$$x^2+y^2=R^2.$$

Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

определяет в пространстве *гиперболической цилиндр* (Рис. 7.4). Уравнение $x^2=2pz$ определяет в пространстве параболической цилиндр (Рис. 7.5).

Все эти поверхности называются *цилиндрами второго порядка,* так как их уравнения есть уравнения второй степени относительно текущих координат x, y и z.

Если уравнения направляющей искомой цилиндрической поверхности заданы в виде:

$$\left.\begin{array}{r} F_1(x;y;z)=0 \\ F_2(x;y;z)=0 \end{array}\right\}, \qquad (7.7)$$

то уравнения образующих этой поверхности будут:

$$\frac{X-x}{l}-\frac{Y-y}{m}=\frac{Z-z}{n}, \tag{7.8}$$

где $(x,y,z)-$ точка принадлежащая направляющей (7.7);

$l,m,n-$ направляющие коэффициенты образующих;

$X,Y,Z-$ текущие координаты цилиндрической поверхности.

Исключая x,y,z из четырёх уравнений (7.7) и (7.8), получим искомое уравнение цилиндрической поверхности.

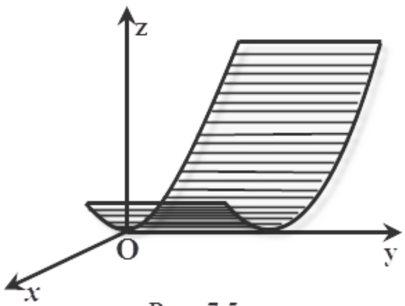


Рис. 7.5.

Задача 5. Составить уравнение цилиндра, образующие которого параллельны прямой

$$\frac{x-4}{-11}=\frac{y-3}{6}=\frac{z+2}{7},$$

направляющей служит линия $y^2=2x\,, z=0$.

Р е ш е н и е. Канонические уравнения образующих будут:

$$\frac{X-x}{-11}=\frac{Y-y}{6}=\frac{Z-z}{7}.$$

Исключаем x,y и z из последних четырёх уравнений. Обозначая через t величину каждого из последних отношений, найдём:

$x=X+11t,\quad y=Y-6t,\qquad z=Z-7t.$

Подставляя эти значения x,y и z в данные уравнения направляющей, получим:

$$\begin{cases}(Y-6t)^2=2(X+11t),\\ Z-7t=0.\end{cases}$$

Исключаем t, найдём: $t=\frac{1}{7}Z$.

$$\left(Y-\frac{6}{7}Z\right)^2=2\left(X+\frac{11}{7}Z\right),$$

или

$49Y^2-84YZ+36Z^2-98X-154Z=0.$

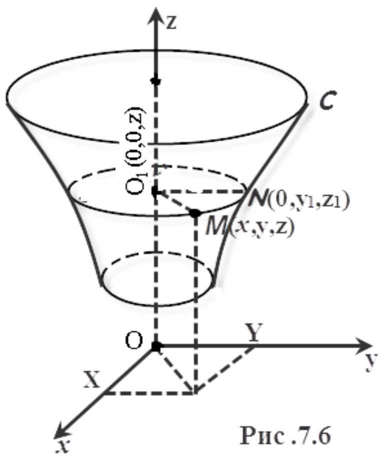


Рис .7.6

§ 7.4. Поверхности вращения

Поверхность, описываемая некоторой линией $\boldsymbol{C}$, вращающейся вокруг неподвижной прямой $\boldsymbol{L}$, называется *поверхностью вращения с осью вращения* $\boldsymbol{L}$. Так как каждая точка линии $\boldsymbol{C}$ при вращении вокруг $\boldsymbol{L}$ описывает окружность, имеющую центры на прямой $\boldsymbol{L}$ и лежащую в плоскости, перпендикулярной к $\boldsymbol{L}$, то можно сказать, что поверхность вращения с осью $\boldsymbol{L}$ есть поверхность, образованная окружностями, имеющими центр на оси $\boldsymbol{L}$ и лежащими в плоскостях, перпендикулярных $\boldsymbol{L}$.

Пусть некоторая кривая $\boldsymbol{C}$ лежит в плоскости yOz. Уравнение этой кривой запишутся в виде:

$$\begin{cases} F(y,z) = 0, \\ x = 0. \end{cases} \qquad (7.9)$$

Найдём уравнение поверхности, образованной вращением кривой $\boldsymbol{C}$ вокруг оси Oz.

Возьмем на поверхности произвольную точку $M(x,y,z)$ (Рис. 7.6.). Проведём через точку M плоскость, перпендикулярную оси Oz, и обозначим точки пересечения её с осью Oz и кривой $\boldsymbol{C}$ соответственно через O_1 и N. Обозначим координаты точки N через (o, y_1, z_1). Отрезки O_1M и O_1N являются радиусами одной и той же окружности. Поэтому $O_1M = O_1N$. Но $O_1M = \sqrt{x^2+y^2}$, $O_1N = |y_1|$. Следовательно, $|y_1| = \sqrt{x^2+y^2}$ или $y_1 = \pm\sqrt{x^2+y^2}$. Кроме того $z_1 = z$.

Так как точка N лежит на кривой $\boldsymbol{C}$, то её координаты удовлетворяют уравнению (7.9). Стало быть, $F(y_1, z_1) = 0$. Исключая вспомогательные координаты y_1 и z_1 точки N, приходим к уравнению

$$F\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}; z\right) = 0. \qquad (7.10)$$

Уравнение (7.10) – искомое уравнение поверхности вращения, ему удовлетворяют координаты любой точки M этой поверхности и не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на поверхности вращения.

Понятно, что если кривая (7.9) вращается вокруг оси Oy, то уравнение поверхности вращения имеет вид

$$F\left(y;\ \pm\sqrt{x^2+z^2}\right) = 0;$$

если кривая лежит в плоскости xOy $(z=0)$ и её уравнение $F(x,y;) = 0$, то уравнение поверхности вращения, образованной вращением кривой вокруг оси Ox, есть

$$F\left(x;\ \pm\sqrt{y^2+z^2}\right) = 0.$$

Например, вращая прямую $y = z$ вокруг оси Oz (Рис. 7.7.), поверхность вращения $z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$ или $x^2 + y^2 = z^2$. Она называется *конусом второго порядка.*

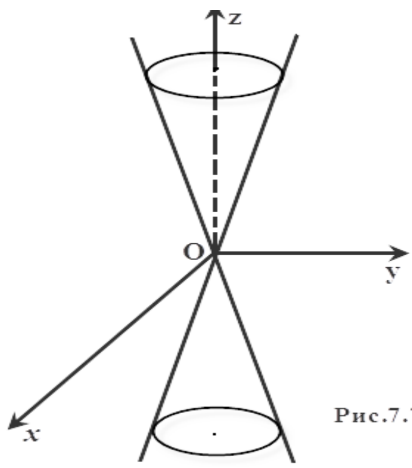


Рис.7.7.

Поверхность, образованная прямыми линиями, проходящими через данную точку S и пересекающими данную плоскую линию $\boldsymbol{C}$ (не проходящую через S), называется *конической поверхностью или конусом* (Рис.7.8.). При этом линия $\boldsymbol{C}$ называется *направляющей* конуса, точка S – её вершиной, а прямая, описывающая поверхность, называется *образующей*.

Пусть направляющая $\boldsymbol{C}$ задана уравнениями

$$\begin{cases} F_1\ (x;y;z\ ) = 0, \\ F_2\ (x;y;z\ ) = 0, \end{cases} \tag{7.11}$$

а точка $S(x_0;y_0;z_0)$ - вершина конуса. Найдём уравнение конуса.

Возьмём на поверхности конуса произвольную точку $M(x;y;z)$ (Рис. 7.8). Образующая, проходящая через точки S и M, пересечёт направляющую $\boldsymbol{C}$ в некоторой точке $N(x_1;y_1;z_1)$. Координаты точки N удовлетворяют уравнениям (7.11) направляющей:

$$\begin{cases} F_1\ (x_1;y_1;z_1\ ) = 0, \\ F_2\ (x_2;y_2;z_2\ ) = 0. \end{cases} \tag{7.12}$$

Канонические уравнения образующих, проходящих через точки S и N, имеют вид:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}. \tag{7.13}$$

Исключая x_1, y_1 и z_1 из уравнений (7.12) и (7.13), получим уравнение конической поверхности, связывающее текущие координаты x, y и z.

Задача 6. Прямая $x = z$ вращается вокруг оси Oz. Найти уравнение поверхности вращения.

Р е ш е н и е. Так как в уравнение линии входят только переменные x и z, то линия лежит в плоскости xOz и уравнение поверхности вращение запишится так: $\pm\sqrt{x^2 + y^2} = z$. Возведя обе части данного равенства в квадрат, получим уравнение поверхности вращения в виде

$x^2 + y^2 = z^2$,

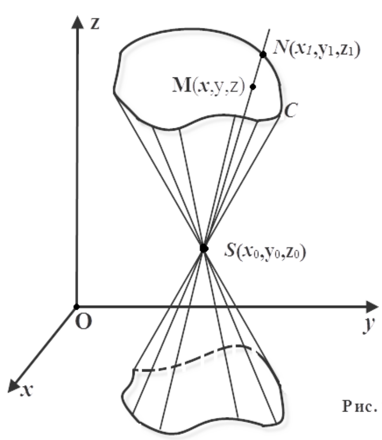


Рис. 7.8.

или $x^2+y^2-z^2=0$ (конус). Вершина этого конуса находится в начале координат, а так как прямая $x=z$ является биссектрисой координатного угла xOz, то угол в осевом сечении этого конуса равен 90^0 (Рис. 7.9). Следует запомнить, что уравнение $x^2+y^2-z^2=0$ определяет конус с вершиной в начале координат и углом в осевом сечением, равным 90^0. Осью этого конуса является ось Oz. Если бы вращения прямой $x=z$ происходило вокруг оси Ox, то получим бы уравнение поверхности вращения в виде $x=\pm\sqrt{y^2+z^2}$. Возведя обе части последнего равенства в квадрат, окончательно получим $y^2+z^2-x^2=0$.

Замечание. Вращая эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1:$$

1) вокруг оси Ox; 2) вокруг оси Oy, получим:

$$1).\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1, \tag{7.14}$$

$$2).\ \frac{x^2+z^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{7.15}$$

Поверхности (7.14) и (7.15) называются *эллипсоидами вращения.*

§ 7.5. Исследование канонические уравнения поверхностей второго порядка

В настоящем параграфе исследуя канонические уравнения поверхностей второго порядка будем определять их геометрический вид. Для этого применим так называемый *«метод сечений»:* исследуя вид поверхности, заданной своим уравнением, будем искать линии пересечения данной поверхности с различными системами плоскостей, в частности с плоскостями, параллельными координатным плоскостям.

1. **Трёхосный эллипсоид.** Исследуем поверхность, заданную уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{7.16}$$

Рассмотрим сечения поверхности (7.16) с плоскостями, параллельными плоскости xOy. Уравнения таких плоскостей $z=h$, где h - произвольное число.

Решая уравнение (7.16) при $z=h$, получим уравнения

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}, \qquad z=h, \tag{7.17}$$

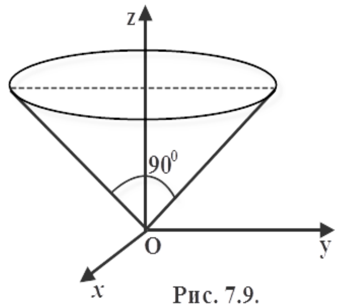


Рис. 7.9.

которые являются уравнениями линии пересечения поверхности с плоскостью $z = h$.

Исследуем уравнения (7.17) при различных значениях h.

1) Если $|h| > c$, $c > 0$, то

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 0.$$

Точек пересечения поверхности (7.16) с плоскостями $z = h$ не существует.

2) Если $|h| = c$, т.е. $h = \pm c$, то

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

Линия пересечения (7.17) вырождается в две точки $(0;0;c)$ и $(0;0;-c)$. Плоскости $z = \pm c$ будут касаться данной поверхности.

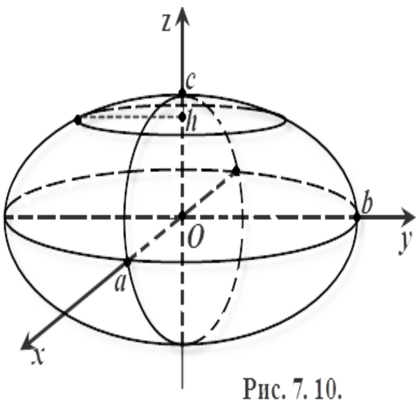


Рис. 7.10.

3) Если $|h| < c$, то уравнения (7.17) можно переписать в виде:

$$\frac{x^2}{a^2(1-\frac{h^2}{c^2})} + \frac{y^2}{b^2(1-\frac{h^2}{c^2})} = 1, \qquad z = h.$$

При указанных значениях h линия пересечения есть эллипс с полуосями (Рис. 7.10)

$$a_1 = a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}, \qquad b_1 = b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}.$$

при этом чем меньше $|h|$, тем больше полуоси a_1 и b_1. При $h = 0$ они достигают наибольших значений $a_1 = a$, $b_1 = b$.

Уравнения (7.17) примут вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad h = 0.$$

Аналогичные результаты получается и при сечение данной поверхности плоскостями $x = h$ и $y = h$.

Полученные линии пересечения позволяют изобразить поверхность (7.16), которая называется *трёхосным эллипсоидом* (Рис. 7.10). Величины a, b и c называются *полуосями* эллипсоида; если какие – либо две полуоси равны, трёхосной эллипсоид превращается в *эллипсоид вращения*; если $a = b = c = r$, то – в сферу $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

Задача 7. Установит, что плоскость $y = 2$ пересекает эллипсоид

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{8} + \frac{z^2}{16} = 1$$

по эллипсу. Найти его полуоси и вершины.

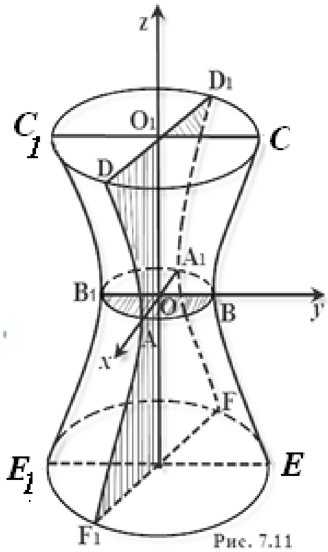


Рис. 7.11

Р е ш е н и е. Пересечение двух поверхностей в пространстве представляет некоторую линию, принадлежащую как одной так и другой поверхности. Уравнение этой линии в данном случае имеет вид

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{8} + \frac{z^2}{16} = 1, \qquad y = 2.$$

Подставим $y = 2$ в первое уравнение и получим

$$\frac{x^2}{25} + \frac{z^2}{16} = \frac{1}{2}.$$

Это уравнение эллипса, расположенного в плоскости $y = 2$. Поскольку каноническое уравнение полученного эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{12{,}5} + \frac{z^2}{8} = 1,$$

то его полуоси равны $a = \sqrt{12.5}$ и $b = \sqrt{8}$ $(c^2 = a^2 - b^2,\ c = \pm 3)$, а вершины эллипса расположены в точках $A_1(-\sqrt{12.5}; 2; 0)$ и $A_2(\sqrt{12.5}; 2; 0)$ – на большем диаметре, $B_1(0; 2; -\sqrt{8})$ и $B_2(0; 2; \sqrt{8})$ – на меньшем диаметре.

2. Однополостный гиперболоид.

2. Однополостный гиперболоид. *Однополостным гиперболоидом* называется поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{7.18}$$

1. Ищем линия пересечения плоскостью xOy:

$$z = 0, \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Это эллипс ABA_1B_1 (Рис. 7.11) с полуосями $OA = a, OB = b$.

2. Пересекая поверхность (7.18) плоскостями $z = \pm h$, параллельными плоскости xOy, получим линию пересечения поверхности, уравнения которой имеют вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}, \qquad z = h$$

или

$$\frac{x^2}{a^2(1+\frac{h^2}{c^2})}+\frac{y^2}{b^2(1+\frac{h^2}{c^2})}=1, \qquad z=h.$$

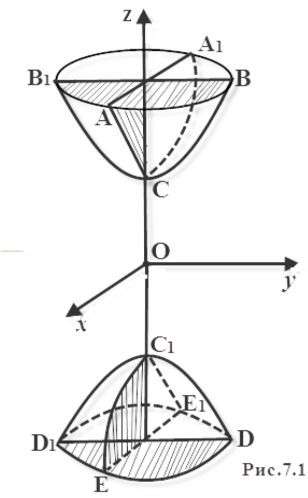


Рис.7.12

Эти эллипсы DCD_1C_1 и FEF_1E_1 с полуосями

$$O_1D=a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}} \qquad \text{и} \qquad O_1C=b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}},$$

действительными при любом h. При $h=0$ полуоси эллипса достигнут своего наименьшего значения. По мере возрастания $|h|$, т.е. по мере удаления плоскостей $z=\pm h$ от координатной плоскости xOy, полуоси эллипса будут увеличиваться.

3. Рассмотрим сечение поверхности (7.18) плоскостью yOz. Совместное решение уравнений (7.18) и $x=0$ даст уравнения гиперболы:

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad x=0.$$

Эта гипербола с ветвями EBC, $E_1B_1C_1$ и действительной полуосью $OB=b$.

4. Сечение поверхности (7.18) плоскостью xOz:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \quad y=0.$$

Эта гипербола с ветвями FAD, $F_1A_1D_1$ и действительной полуосью $OA=a$.

Найденные линии пересечения позволят изобразить поверхность, заданную уравнением (7.18).

При $a=b$ уравнение (7.18) определит однополостный гиперболоид вращения

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

все горизонтальные сечения которого окружности радиуса $a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$.

Замечание. Уравнения

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

определяют однополостные гиперболоиды. Эти уравнения того же типа, что уравнение (7.18). в правой части все эти уравнения содержат единицу, в левой части – только квадраты всех координат, причём два коэффициента положительны, один – отрицателен.

Задача 8. Какую поверхность определяет уравнение

$2x^2-6y^2+3z^2-12x-24y-24z+30=0$?

Р е ш е н и е. Преобразуем левую часть уравнения:

$$2(x^2-6x+9-9)-6(y^2+4y+4-4)+3(z^2-8z+16-16)+30=0,$$

$$2(x-3)^2-6(y+2)^2+3(z-4)^2=12$$

Полагая $X=x-3, Y=y+2, Z=z-4,$ упростим последнее равенство, т.е.

$$\frac{X^2}{6}-\frac{Y^2}{2}+\frac{Z^2}{4}=1,$$

Изучим форму этой поверхности с помощью метода сечений. В сечении поверхности плоскостью xOy получим гиперболу

$$\frac{X^2}{6}-\frac{Y^2}{2}=1, \qquad Z=0;$$

в сечении плоскостью yOz - гиперболу

$$-\frac{Y^2}{2}+\frac{Z^2}{4}=1, \qquad X=0;$$

в сечении плоскостью xOz - эллипс

$$\frac{X^2}{6}+\frac{Z^2}{4}=1, \qquad Y=0.$$

Плоскость, параллельная плоскости xOy, пересекает поверхность по гиперболе

$$\frac{X^2}{6}-\frac{Y^2}{2}=1-\frac{h^2}{4}, Z=h.$$

Плоскость, параллельная плоскости yOz, пересекает поверхность по гиперболе

$$-\frac{Y^2}{2}+\frac{Z^2}{4}=1-\frac{h^2}{6}, \qquad X=h.$$

Плоскость, параллельная плоскости xOz, пересекает поверхность по эллипсу

$$\frac{X^2}{6}+\frac{Z^2}{4}=1+\frac{h^2}{2}, \qquad Y=h.$$

Анализируя сечения, заключаем, что данная поверхность является однополостным гиперболоидом.

3. Двухполостный гиперболоид. *Двухполостным гиперболоидом* называется поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \qquad (7.19)$$

Исследуем форму двухполостного гиперболоида (7.19) по его сечениям плоскостями.

1). Совместное решение уравнения (7.19) и уравнения плоскостей $z = h$ дает:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \qquad x = \pm h, \tag{7.20}$$

или

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1, \qquad Z = h.$$

При $|h| < c$ уравнения (7.20) являются уравнениями мнимого место точек, т.е. в этом случае плоскость не пересекает поверхности (7.19).

При $|h| > c$ уравнения (7.20) могут быт записаны так:

$$\frac{x^2}{a^2(\frac{h^2}{c^2} - 1)} + \frac{y^2}{b^2(\frac{h^2}{c^2} - 1)} = 1, \qquad z = \pm h. \tag{7.21}$$

Уравнения (7.21) являются уравнениями эллипсы ABA_1B_1 и EDE_1D_1 (Рис.7.12) с полуосями

$$a\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1} \quad \text{и} \quad b\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1},$$

действительными при условии $|h| > c$, при котором секущая плоскость расположена не ниже точки $C\ (0;0;c)$ или не выше точки $C_1(o;o;-c)$. По мери возрастания $|h|$, полуоси эллипса (7.21) увеличиваются.

2). Найдём теперь линию пересечения поверхности (7.19) с плоскостью yOz:

$$x = 0, \qquad \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Это гипербола с ветвями BCB_1, DC_1D_1. Действительная полуось равна c, мнимая b.

3). Аналогично в сечении поверхности (7.19) плоскостью $y = 0$ получается гипербола

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \qquad y = 0.$$

Эта гипербола с ветвями ACA_1, EC_1E_1. Действительная полуось равна c, а мнимая a.

При $a = b$ уравнение (7.19) определяет двухполюсный гиперболоид вращение

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1,$$

горизонтальные сечения которого – окружности радиуса $a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}$, действительного при $|h|>c$.

З а м е ч а н и е. Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1, \quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$$

являются уравнениями двухполостных гиперболоидов. Эти уравнения как, уравнение (7.19) , в правой части содержат отрицательную единицу, в левой части два положительных и один отрицательный коэффициент при квадратах координат.

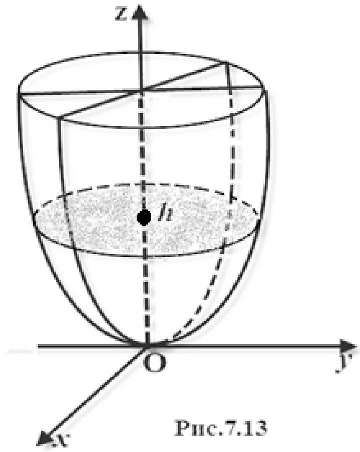


Рис.7.13

Уравнение (7.19) можно записать в виде

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

где в правой части стоит единица, но в левой части только один коэффициент положителен, два других – отрицательны.

Задача 9. Какую поверхность определится уравнением

$4x^2-12y^2-6z^2=12,$

Р е ш е н и е . Перепишем уравнение в виде

$$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{1}-\frac{z^2}{2}=1,$$

$$\frac{y^2}{1}+\frac{z^2}{2}-\frac{x^2}{3}=-1.$$

Из сравнения с (7.19) заключаем ,что это двухполостный гиперболоид ось которого совпадает с осью Ox.

***4.* Эллиптический параболоид.** *Эллиптическим параболоидом называется поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид*

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z, \quad \text{где } p>0, \ q>0. \qquad (7.22)$$

Исследуем поверхность, заданную уравнением (7.22) по его сечениям плоскостями (Рис.7.13).

1) Плоскостью xOy:

$$z=0, \qquad \frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=0,$$

т.е. плоскость $z=0$ касается поверхности (7.22) в точке $(0;0;0)$.

Если $h<0$, то плоскости $z=h$ поверхности не пересекают; если $h>0$, то в сечении получается эллипс, уравнение которого имеет вид

$$\frac{x^2}{2ph}+\frac{y^2}{2qh}=1, \qquad z=h.$$

Его полуоси возрастают с ростом h.

При пересечении поверхности (7.22) координатными плоскостями xOz и yOz получатся соответственно параболы

$$x^2 = 2pz \text{ и } y^2 = 2qz.$$

Таким образом, поверхность, определяемая уравнением (7.22) имеет вид выпуклой, бесконечно расширяющейся чаши (Рис.7.13).

При $p = q$ уравнение (7.22) определяет параболоид вращения $x^2 + y^2 = 2pz$, все горизонтальные сечения которого плоскостями $z = h > 0$ – окружности радиуса $\sqrt{2ph}$.

Задача 10. Выяснить какую поверхности определяется уравнением $4x^2 + 6y^2 - 24x + 36y - 24z + 90 = 0$.

Р е ш е н и е. Группируем члены, содержащие x и y

$4(x^2 - 6x) + 6(y^2 + 6y) + 90 = 24z$.

Дополняем до полных квадратов выражения в скобках:

$$4(x^2 - 6x + 9 - 9) + 6(y^2 + 6y + 9 - 9) + 90 = 24z.$$

или

$$4(x-3)^2 + 6(y+3)^2 = 12 \cdot 2z.$$

Сделаем параллельный перенос осей координат, приняв за новое начало точку $O_1(3;-3;0)$. Тогда

$$X = x - 3, \qquad Y = y + 3, \qquad Z = z.$$

Получаем уравнение

$$\frac{X^2}{3} + \frac{Y^2}{2} = 2Z,$$

определяющее гиперболический параболоид.

5. Гиперболический параболоид. *Гиперболическим параболоидом называется поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид*

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2Z, \qquad p > 0, q > 0. \qquad (7.23)$$

Исследуем поверхность, определяемую уравнением (7.23). рассмотрим сечения поверхности плоскостями $z = h$. Получим кривую

$$\frac{x^2}{2ph} - \frac{y^2}{2qh} = 1, \qquad z = h,$$

которая при всех значениях $h \neq 0$ является гиперболой. При $h > 0$ её действительные оси параллельны оси Ox; при $h < 0$ – параллельны оси Oy; при $h = 0$ – линия пересечения

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 0$$

распадается на пару пересекающихся прямых

$$\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}=0 \quad \text{и} \quad \frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}=0.$$

При пересечении поверхности плоскостями, параллельными плоскости xOz $(y=h)$, будут получаться параболы

$$x^2=2p\left(z+\frac{h^2}{2q}\right), \quad y=h,$$

ветви которых направлены вверх. При $y=0$ в сечении получается парабола

$$x^2=2pz, \quad y=0$$

с вершиной в начале координат и осью симметрии Oz.

Пересекая поверхность (7.23) плоскостями $x=h$, получим параболы

$$y^2=-2p(Z-\frac{h^2}{2p}),$$

ветви которых направлены вниз.

Анализ линии пересечения позволяет определить вид поверхности: она имеет вид седла (Рис. 7.14).

Задача 11. Доказать, что прямая

$$\frac{x}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{2}$$

лежит на гиперболическом параболоиде

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=z.$$

Р е ш е н и е. Запишем параметрические уравнения данной прямой:

$$x=3t, \qquad y=-2t+2, \qquad z=2t-1.$$

Подставляя значения x, y, z в уравнение гиперболической параболоиде

$$\frac{9t^2}{9}-\frac{4(1-t)^2}{4}=2t-1,$$

откуда получаем $0=0$. Это означает, что при любом значении t параметрические уравнения прямой удовлетворяют уравнению данной поверхности.

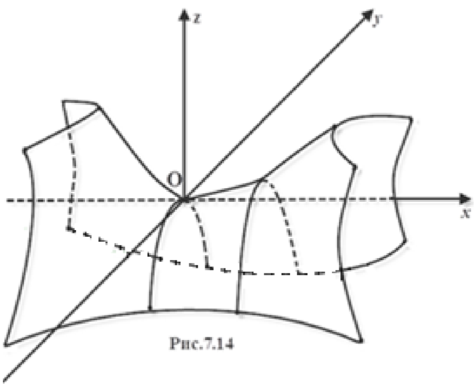


Рис.7.14

6. Конус второго порядка. Исследуем уравнение поверхности

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0. \tag{7.24}$$

Так как левая часть уравнения (7.24) является однородной функцией относительно x, y, z, то оно является уравнением конической поверхности с вершиной в начале координат.

Пересечем поверхность (7.24) плоскостями $z = \pm h$. Линия пересечения

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2}, \; z = \pm h.$$

При $h = 0$ она вырождается в точку $(0;0;0)$. При $h \neq 0$ в сечении будем получать эллипсы

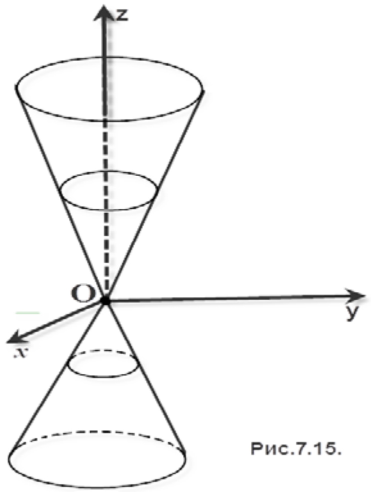


Рис.7.15.

$$\frac{x^2}{\frac{a^2h^2}{c^2}} + \frac{y^2}{\frac{b^2h^2}{c^2}} = 1, \; z = \pm h.$$

Полуоси этих эллипсов будут возрастать при возрастании $|h|$.

Рассечём поверхности (7.24) плоскостью yOz $(x = 0)$. Получаться

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \qquad x = 0,$$

распадающаяся на две пересекающиеся прямые

$$\frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0, \qquad \text{и} \quad \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0.$$

При пересечении поверхности (7.24) плоскостью $y = 0$, получим линию

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \; y = 0,$$

также распадающаяся на две пересекающиеся прямые

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0, \qquad \text{и} \quad \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0.$$

Поверхность определяемая уравнением (7.24), называется *конусом второго порядка.* Полученные линии пересечения позволят изобразить поверхность (Рис. 7.15).

Задача 12. Привести к каноническому виду уравнение поверхности

$$x^2 + y^2 - z^2 - 2y + 2z = 0.$$

Р е ш е н и е. Группируем члены, содержащие x и y

$$x^2 + (y^2 - 2y) - (z^2 - 2z) = 0.$$

Дополняем до полных квадратов выражения в скобках:

$$x^2 + (y^2 - 2y + 1) - (z^2 - 2z + 1) = 0.$$

$$x^2 + (y-1)^2 - (z-1)^2 = 0.$$

Таким образом получим уравнение конуса второго порядка с вершиной в точке $S(0;1;1)$, ось которого параллельна оси Oz.

Примеры решения задач

Пример 1. Составить уравнение сферической поверхности, проходящей через окружность

$$\begin{cases} x^2 + (y-2)^2 - \left(z+\dfrac{1}{2}\right)^2 = 4, \\ x - 2y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

и точку $M(2;3;1)$, а также найти её центр и радиус.

Р е ш е н и е. Через окружность в пространстве можно провести бесчисленное множество сфер, уравнение которых будет иметь вид:

$$x^2 + (y-2)^2 - \left(z+\frac{1}{2}\right)^2 - 4 + \lambda(x - 2y - z + 1) = 0,$$

где λ подлежит определению.

Из этого пучка выделим сферу, проходящую через точку $M(2;3;1)$:

$$4 + (3-2)^2 - \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 - 4 + \lambda(2 - 6 - 1 + 1) = 0,$$

откуда $\lambda = -\frac{5}{16}$.

Уравнение искомой сферической поверхности будет имеет вид:

$$x^2 + (y-2)^2 - \left(z+\frac{1}{2}\right)^2 - 4 - \frac{5}{16}(x - 2y - z + 1) = 0,$$

или

$$16x^2 + 16y^2 - 16z^2 - 5x - 54y - 11z - 9 = 0.$$

После алгебраических преобразований получим следующее выражение:

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 - \left(z-\frac{1}{4}\right)^2 = 13{,}34.$$

Сравнивая с формулой сферы (7.3) находим, что центр сферы имеет координаты $\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2};\frac{1}{4}\right)$, радиус её равен $R = 3{,}65$.

Пример 2. Составить уравнения касательных плоскостей к сфере $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=6$ в точках её пересечения с прямой
$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{2}.$$

Р е ш е н и е. Точки пересечения прямой со сферой получается подстановкой равенств $x=1+t,\ y=-t,\ z=1+2t$ в уравнение сферы, определением t и подстановкой обратно в уравнения прямой. Имеем: $(1+t-2)^2+(-t+1)^2+(1+2t-3)^2=6$, или $6(t-1)^2=6$, откуда $t_1=0$, $t_2=2$. Далее $x_1=1, y_1=0, z_1=1$; $x_2=3, y_2=-2, z_2=5$. Итак, $M_1(1;0;1)$, $M_2(3;-2;5)$ – точки пересечения прямой и сферы.

Составим уравнение первой касательной плоскости, проходящей через точку $M_1(1{,}0{,}1)$. Её нормальный вектор $\boldsymbol{M_0M_1}$, где $M_0(2;-1;3)$ центр сферы: $\boldsymbol{M_0M_1}=\{-1;+1;-2\}$, а уравнении плоскости
$$-(x-1)+y-2(z-1)=0 \quad \text{или} \quad x-y+2z-3=0.$$

Уравнение второй плоскости, по аналогии $\quad x-y+2z-15=0.$

Полученные плоскости параллельны, потому, что данная прямая проходит через центр сферы M_0.

Пример 3. Определить координаты центра и радиус сферы, заданной уравнением
$$2x^2+2y^2+2z^2+4y-3z+2=0.$$

Р е ш е н и е. Приведем уравнение сферы к каноническому виду (7.3), для чего записывая уравнение в виде
$$x^2+y^2+z^2+2y-\frac{3}{2}z+1=0$$
и дополняя до полных квадратов члены, содержащее x, y и z, будем иметь
$$x^2+(y^2+2y+1)-1+\left(z^2-\frac{3}{2}z+\frac{9}{4}\right)-\frac{9}{4}+1=0,$$
или
$$x^2+(y+1)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}.$$

Следовательно, центр сферы находится в точке $C(0,-1,\frac{3}{2})$, а её радиус $R=\frac{3}{2}$.

Пример 4. Составить уравнение сферы, если известно, что точки $A(2;5;-7)$ и $B(6;-1;3)$ – концы одного из её диаметров.

Р е ш е н и е. Центром искомой сферы является середина отрезка AB, а её радиус равен половине длины отрезка AB. Координаты середины отрезка AB находим известным нам формулам

$$x_C=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{2+6}{2}=4, \qquad y_C=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{5-1}{2}=2,$$
$$z_C=\frac{z_A+z_B}{2}=\frac{-7+3}{2}=-2,$$
получим точку $C(4,2,-2)$. По формуле
$$|CB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}, \qquad |CB|=R$$
находим радиус сферы
$$R=\sqrt{(4-2)^2+(2-5)^2+(-2+7)^2}=\sqrt{4+9+25}=\sqrt{38}.$$
Таким образом, уравнение сферы имеет вид
$$(x-4)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=38.$$

Пример 5. Написать уравнение сферы, проходящей через три точки $M_1(3;-1;9)$, $M_2(7;-2;6)$, $M_3(4;2;5)$ а её центр сферы лежит в плоскости $2x-4y-z-7=0$.

Р е ш е н и е. Уравнение сферы ищем в виде
$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

Поскольку центр сферы лежит в плоскости $x+y+z-7=0$, то его координаты и координаты точек M_1, M_2 и M_3 удовлетворяют уравнению сферы. Подставляя данные координаты в уравнение сферы, получим систему четырёх уравнений относительно четырёх неизвестных a, b, c и R:

$(3-a)^2+(-1-b)^2+(9-c)^2=R^2,$
$(7-a)^2+(-2-b)^2+(6-c)^2=R^2,$
$(4-a)^2+(2-b)^2+(5-c)^2=R^2,$
$2a-4b-c-7=0.$

Решая эту систему уравнений, находим:
$$a=1, \qquad b=-4, \qquad c=3, \qquad R=7.$$
Следовательно, уравнение сферы имеет вид
$$(x-1)^2+(y+4)^2+(z-3)^2=49.$$

Пример 6. Дана ось круглого цилиндра
$x=3-2t, \qquad y=2-t, \qquad z=5+4t$
и точка $M_0(-1,1,0)$ на его поверхности. Составить уравнение цилиндра.

Р е ш е н и е. Пусть $M(x,y,z)$ – произвольная точка, данного круглого цилиндра. Расстояние этой точки до оси цилиндра равно расстоянию точки

M_0 до той же оси. Найдём эти расстояния. Используем формулу расстояние от точки до прямой:

$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} \frac{y_1 - y_0}{m} & \frac{z_1 - z_0}{n} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{x_1 - x_0}{l} & \frac{z_1 - z_0}{n} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{x_1 - x_0}{l} & \frac{y_1 - y_0}{m} \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}},$$

где $M_1(x_1, y_1, z_1) -$ точка через которую проходит прямая, $(l, m, n) -$ координаты направляющего вектора прямой.

$$d_0 = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} 2-1 & 5-0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 3+1 & 5-0 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 3+1 & 2-1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 4^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{4 + 1 + 16}} = \frac{\sqrt{9^2 + 26^2 + (-2)^2}}{\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{761}}{\sqrt{21}},$$

$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} 2-y & 5-z \\ -1 & 4 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 3-x & 5-z \\ -2 & 4 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 3-x & 2-y \\ -2 & -1 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 4^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{|4(2-y) + 1(5-z)|^2 + |4(3-x) + 2(5-z)|^2 + |-1(3-x) + 2(2-y)|^2}}{\sqrt{21}} =$$

$$= \frac{\sqrt{(13 - 4y - z)^2 + (22 - 4x - 2z)^2 + (1 + x - 2y)^2}}{\sqrt{21}}.$$

Так как $d_0 = d$, то уравнение круглого цилиндра, имеет вид

$$\sqrt{(13 - 4y - z)^2 + (22 - 4x - 2z)^2 + (1 + x - 2y)^2} = \sqrt{761}.$$

Упрощая это уравнение, получим

$$15x^2 + 12y^2 - 5z^2 + 4xy - 16xz - 8yz + 174x + 108y + 114z + 107 = 0.$$

Пример 7. Какую поверхность определяет уравнение

$$\frac{z^2}{5} - \frac{x^2}{7} = 1?$$

Р е ш е н и е. Данное уравнение содержит только две переменные x и z и определяет в пространстве цилиндрическую поверхность, образующие которого параллельны оси Oy, а направляющей служит данная гипербола, лежащая в плоскости xOz. Такой цилиндр называется гиперболическим.

Пример 8. Какую поверхность определяет

$$x^2+z^2-2az=0?$$

Р е ш е н и е. Преобразуем данное уравнение, получим

$$x^2+z^2-2az=x^2+(z^2-2az+a^2)-a^2=0,$$

откуда $x^2+(z-a)^2=a^2$. Это уравнение окружности с центром в точке $C(0;0;a)$ и радиусом $r=a$. В пространстве исходное уравнение определяет прямой круговой цилиндр, для которого данная окружность служит направляющей. Образующие цилиндра параллельны оси Oy, причём сама ось является одной из образующих, так как данная окружность проходит через начало координат.

Пример 9. Какая линия изображается системой уравнений

$$\left.\begin{aligned} x^2+(y-5)^2+z^2&=13\\ y&=3\end{aligned}\right\}.$$

Р е ш е н и е. Первое из уравнений системы определяет сферу, а второе – плоскость, параллельную плоскости xOz. Так как данная плоскость пересекает данную сферу, линией пересечения будет окружность, т.е. данная линия – эта окружность лежащая в плоскости $y=6$.

Записываем уравнение этой окружности. Исключая y из данной системы, получим

$$\left.\begin{aligned} x^2+z^2&=9\\ y&=3\end{aligned}\right\}.$$

Первое уравнение определяет в пространстве прямой круговой цилиндр, у которого осью служит ось Oy, а второе – плоскость, параллельную плоскости xOz. Первое уравнение последней системы $x^2+z^2=9$ на плоскости xOz определяет окружность, являющуюся прямоугольной проекцией той окружности, которая определяется заданной системой уравнений.

Пример 10. Построить тела, ограниченные поверхностями $y=x^2$, $z=0$, $z=2$, $y=1$.

Р е ш е н и е. $y=x^2-$ это уравнение параболического цилиндра, $z=0-$ плоскость xOy, $z=2-$ плоскость параллельная xOy и отсекающая на оси Oz отрезок, равный 2, $y=1-$уравнение плоскости перпендикулярной оси Oy в точке $(0;1;0)$.

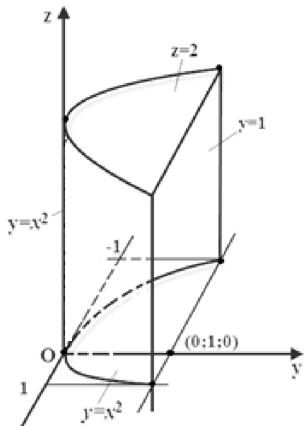


Рис. 7.16.

$$\begin{cases} z=0,\\ y=x^2\end{cases}$$ – парабола $y=x^2$ в плоскости xOy,

$$\begin{cases} z = 2, \\ y = x^2 \end{cases}$$ – парабола $y = x^2$ в плоскости $z = 2$.

Найдём в плоскости xOy пересечение параболы $y = x^2$ и прямой $y = 1$:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow (-1;1) \quad \text{и} \quad (1;1).$$

Построим параболический цилиндр $y = x^2$ и его сечения плоскостями $z = 0$, $z = 2$, $y = 1$, получим искомое тело (Рис. 7.16).

Пример 11. Исследовать форму и расположение относительно системы координат поверхности

$$2 - z = x^2 + y^2.$$

Р е ш е н и е. Применим метод сечений. Полагая в данном уравнении $z = h$, получим $x^2 + y^2 = 2 - h$. Отсюда следует, что $2 - h$ должно быть величиной неотрицательной. Обозначая $2 - h = R^2$, получим в сечении плоскостью $z = h$ линию $x^2 + y^2 = R^2$, $z = h$. Эта линия – окружность радиуса R с центром на оси Oz. Следовательно, данная поверхность является поверхностью вращения вокруг оси Oz. Чтобы выяснить, вращением какой линии она получается, пересечем поверхность плоскостью $y = 0$. В сечение получится парабола на плоскости xOz:

$$x^2 = 2 - z, \qquad y = 0.$$

Вершина её лежит в точке $(0;0;2)$ и направлена в отрицательную сторону оси Oz.

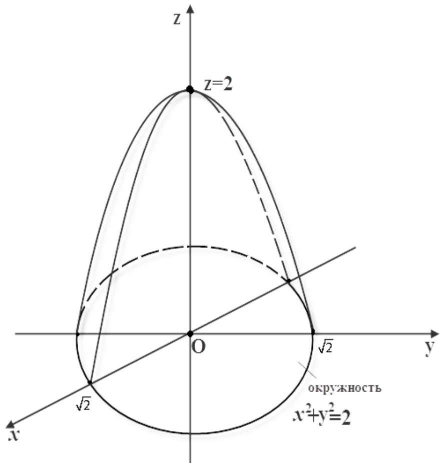


Рис. 7.17

Таким образом, исследуемая поверхность является параболоидом вращения (Рис. 7.17).

Пример 12. Составить уравнение цилиндра, направляющей которого служит гипербола

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 16, \\ z = 0, \end{cases}$$

а образующие параллельны биссектрисе угла xOz.

Р е ш е н и е. Найдём направляющие коэффициенты биссектрисы угла. Эта прямая проходит через начало координат и образует с осями координат углы $\alpha = 45^0$, $\beta = 90^0, \gamma = 90^0$. Направляющие косинусы биссектрисы угла xOz будут равны:

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \; \cos\beta = \cos 90^0 = 0.$$

Так как направляющие коэффициенты прямой пропорциональны направляющим косинусам, то можно записать:

$$l:m:n=\frac{\sqrt{2}}{2}:0:\frac{\sqrt{2}}{2}=1:0:1.$$

Таким образом, можем считать, что направление образующих цилиндра дано отношениями: $l:m:n=1:0:1$. Тогда уравнения образующих искомой цилиндрической поверхности будут

$$\frac{X-x}{1}=\frac{Y-y}{0}=\frac{Z-z}{1},$$

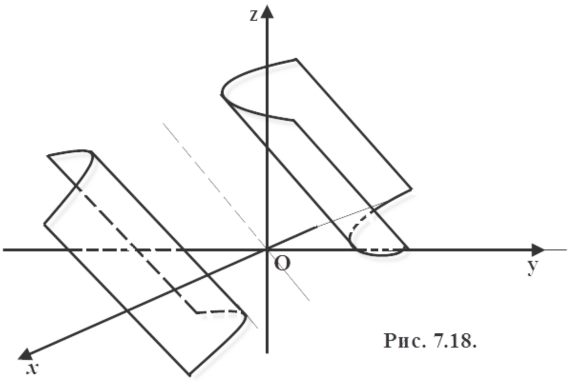


Рис. 7.18.

где X,Y,Z – текущие координаты цилиндрической поверхности; x,y,z – координаты точки, лежащей на направляющей.

Имеем четыре уравнения:

$$\begin{cases} x-y=16, \\ z=0, \end{cases} \quad \text{и} \quad \frac{X-x}{1}=\frac{Y-y}{0}=\frac{Z-z}{1}.$$

Исключив из этих уравнений x,y и z, найдём уравнение цилиндрической поверхности.

Подставив в уравнения образующих $z=0$, найдём, что $X-x=Z$, или $x=X-Z$, $y-Y=0$, или $y=Y$.

Подставив эти значения x и y в первое уравнение направляющей, получим $(X-Z)^2-Y^2=16$, или $X^2-Y^2+Z^2+2XZ-16=0$ (Рис. 7.18).

Пример 13. Построить тела, ограниченной поверхностями

$$x^2+y^2=4x, z=x, z=2x.$$

Решение. $x^2+y^2=4x$ – уравнение цилиндрической поверхности, образующая которой параллельна оси Oz. Преобразуем это уравнение к виду $(x-4x)^2+y^2=0$, $x^2-4x+4+y^2=4$, $(x-2)^2$

это окружность в плоскости xOy с центром $(2;0)$ и радиусом $R=2$. В пространстве – это прямой круговой цилиндр с основанием $(x-2)^2+y^2=4; z=x$ и $z=2x$ – плоскости, проходящие через ось Oy перпендикулярно xOz и пересекающие цилиндр. Центр полученной окружности в плоскости xOy есть точка $(2;0)$, $R=2$ (Рис. 7.19).

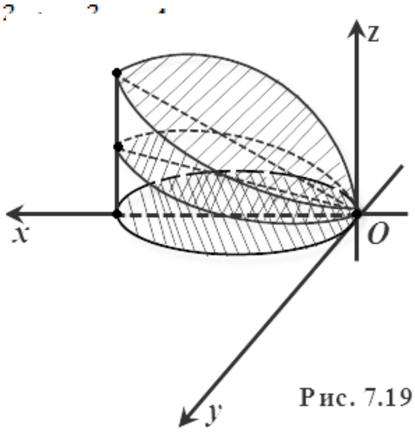


Рис. 7.19.

Пример 14. Определить уравнение поверхности вращения прямой $y=3x$ вокруг оси Ox.

Р е ш е н и е. Так как в уравнение линии входят только перемененные x и y, то линия лежит в плоскости xOy.

Для написания уравнения поверхности вращения в уравнении прямой $y = 3x$ переменная x должна остаться без изменения, так как она соответствует оси вращения Ox. Вторая же переменная y в уравнении прямой должна быть заменена $\pm\sqrt{y^2+z^2}$. Уравнение поверхности вращения запишется в виде

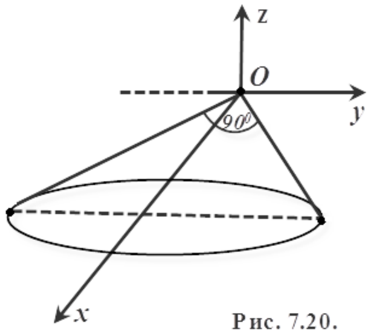


Рис. 7.20.

$$\pm\sqrt{y^2+z^2} = 3x.$$

Откуда окончательно получим уравнение поверхности вращения (Рис. 7.20): $y^2+z^2-9x^2=0$. Данное уравнение определяет конуса.

Пример 15. Определить уравнение поверхности вращения, образованной вращением эллипса

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

вокруг оси Oy.

Р е ш е н и е. Уравнение кривой содержит координаты y и z, значит, кривая лежит в плоскости yOz.

Для определения уравнения поверхности, образованной вращением эллипса вокруг оси Oy, надо в уравнение эллипса переменную y, соответствующую оси вращения, составить без изменения, а вторую переменную z в уравнении эллипса заменить на $\pm\sqrt{x^2+z^2}$.

Искомое уравнение поверхности будет иметь вид:

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{\left(\pm\sqrt{x^2+z^2}\right)^2}{c^2}=1,$$

или

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2+z^2}{c^2}=1.$$

Эта поверхность называется *эллипсоидом вращения.*

Пример 16. Найти уравнение поверхности, образованной вращением гиперболы

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

вокруг 1) оси Oy; 2) оси Oz.

О т в е т. 1).

$$\frac{x^2+z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1.$$

(двуполостный гиперболоид вращения (Рис. 7.21)).

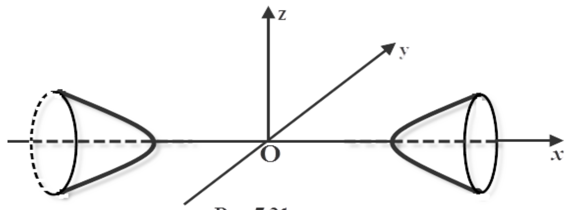


Рис.7.21

2). $\dfrac{x^2+y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ – однополостный гиперболоид вращения (Рис.7.22).

Пример 17. Какие геометрические образы представляются уравнениями:

1). $2x^2-6y^2+3z^2-12x-24y-24z+30=0.$

2). $-x^2+2y^2+3z^2-4x+4y-24z+52=0.$

3). $x^2+2y^2-3z^2+8y+18z-12=0.$

4). $x^2+2y^2+6x-18y-8z+49=0.$

5). $x^2+4x-6y+22=0.$

Р е ш е н и е. 1). Преобразуем левую часть уравнения, дополняя соответствующие члены до полных квадратов:

$(2x^2-12x)-(6y^2+24y)+(3z^2-24z)+30=0$

$2(x^2-6x+9)-18-6(y^2+4y+4)+24+$

$+3(z^2-8z+16)-48+30=0,$

$2(x-3)^2-6(y+2)^2+3(z-4)^2=12.$

Разделив обе части уравнения на 12, получим

$$\frac{(x-3)^2}{6}-\frac{(y+2)^2}{2}+\frac{(z-4)^2}{4}=1.$$

Вводя новые координаты

$X=x-3,\qquad Y=y+2,\qquad Z=z-4,$

последнее уравнение примет вид

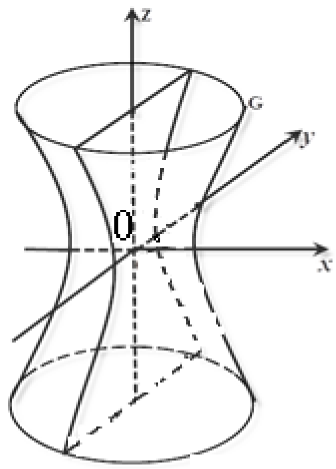


Рис. 7.22

$$\frac{X^2}{6}-\frac{Y^2}{2}+\frac{Z^2}{4}=1.$$

Данная поверхность является однополостным гиперболоидом.

Решая, аналогично, оставшийся задачи, приходим к следующими заключениями:

$$2).\qquad \frac{Y^2}{3}+\frac{Z^2}{2}-\frac{X^2}{6}=-1,$$

где $Y=y+1,\qquad Z=z-4,\qquad X=x+2.$

Данное уравнении представляет двухполостный гиперболоид.

3). $$\frac{X^2}{6}+\frac{Y^2}{3}-\frac{Z^2}{2}=0,$$

где обазначено $X=x+1,\quad Y=y+2,\quad X=z-3.$

Данное уравнение определяет конусом.

4). $$\frac{X^2}{4}+\frac{Y^2}{2}=2Z,$$

где обозначено: $X=x+3,\ Y=y-\frac{9}{2},\ Z=z+\frac{1}{16}.$

Данное уравнение представляет эллиптический параболоид.

5) $X^2=6Y,$ где обозначено: $X=x+2,\ Y=y-3.$

Данное уравнение представляет параболический цилиндр.

Пример 7.18. Исследовать линию пресечения гиперболоида

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-z^2=1$$

с плоскостью $4x-3y-12z-6=0,$ пользуясь её проекциями на координатные плоскости.

Р е ш е н и е. Линия пересечения гиперболоида с плоскостью определяется системой

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}-z^2=1,\\ 4x-3y-12z-6=0.\end{cases}$$

Выражаем из второго уравнения

$$z=\frac{4x-3y-6}{12}\quad \text{и}\quad z^2=\frac{16x^2+9y^2+36-24xy-48x+36y}{144}$$

и подставляем в первое уравнение. Получаем

$$9y^2+8xy+16x-12y-60=0.$$

Это уравнение проекции на плоскость xOy линия пересечения гиперболоида с плоскостью. Вместе с тем это уравнение цилиндрической поверхности с образующей, параллельной оси Oz, направляющая которой есть исследуемая линия. Уравнение этой линии следует привести к каноническому виду известным формулами преобразования координат. В данном случае методом разложения на множители можно получить $(y+2)(9y+8x-30)=0$, т.е. данная линия представляет пару прямых $y+2=0$ и $8x+9y-30=0$, которые пересекается в точке

$$\begin{cases}y+2=0,\\ 8x+9y-30=0,\end{cases}$$

т.е. $M_1(6;-2)$.

По аналогии с этим, проектируем искомую линию на плоскость xOz. Получаем пару прямых $x-3z=0$ и $5x-9z-12=0$, которые пересекаются в точке $M_2(6;2)$.

Наконец, на плоскость yOz искомая линия проектируется в прямые $y+2=0$ и $5y+8z-6=0$, которые пересекаются в точке $M_3(-2;2)$.

Если проекции на координатные плоскости данной линии являются пересекающимися прямыми, то сама эта линия представляет пару пересекающихся в точке $M(6;-2;2)$ прямых. Координаты M поучаются из координат её проекций M_1, M_2, M_3;

Пример 7.19. Даны гиперболический параболоид $x^2-\frac{y^2}{4}=z$ и одна из его касательных плоскостей $10x-2y-z-21=0$. Найти уравнения каждой из тех двух прямых, по которой плоскость касается с параболоидом.

Р е ш е н и е. Уравнения искомых прямых задаются системой уравнений, которую последовательно преобразуем.

$$\begin{cases} 10x-2y-z-21=0, \\ x^2-\dfrac{y^2}{4}=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=10x-2y-21, \\ x^2-\dfrac{y^2}{4}=10x-2y-21 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z=10x-2y-21, \\ (2x-y-6y)\cdot(2x+y-14)=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 10x-2y-z-21=0, \\ 2x-y-6=0, \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 10x-2y-z-21=0, \\ 2x+y-14=0. \end{cases} \qquad (*)$$

Уравнения прямых $(*)$ получены в общем виде. Приведем первой системы уравнений $(*)$ к каноническому виду. Для этого найдём две точки на прямой первой системы $(*)$:

$$z=0, \quad \begin{cases} 10x-2y=21, \\ 2x-y=6. \end{cases} \Rightarrow M_1\left(\frac{3}{2};-3;0\right),$$

$$y=0, \quad \begin{cases} 10x-z=21, \\ 2x-6=0. \end{cases} \Rightarrow M_2(3;0;9).$$

Составим уравнение прямой, проходящей через точки M_1 и M_2.

$\boldsymbol{M_1M_2}=\left(\frac{3}{2};3;9\right)=\frac{3}{2}(1;2;6)$. Данная прямая первой системы $(*)$ имеет вид:

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-9}{6} \quad \text{или} \quad x=3+t, y=2t, z=9+6t.$$

Аналогично составляется уравнение прямой второй системы $(*)$, проходящей через точку M_2:

$$\frac{x-5}{1}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z-21}{14}.$$

Пример 7.20. Найти линии пересечения поверхности гиперболоида

$$\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{18}-\frac{z^2}{9}=1$$

с координатными плоскостями и с плоскостями $z=2, x=3$.

Р е ш е н и е. 1) Уравнении линии пересечения данного гиперболоида с координатной плоскостью xOy

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{x^2}{27}+\dfrac{y^2}{18}=0\\ z=0\end{array}\right\}\Rightarrow \text{эллипс;}$$

2) с плоскостью yOz гиперболоид пересекается по линии

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{y^2}{18}-\dfrac{z^2}{9}=1\\ x=0\end{array}\right\}\Rightarrow \text{гипербола;}$$

3) с плоскостью xOz – по линии

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{x^2}{27}-\dfrac{z^2}{9}=1\\ y=0\end{array}\right\}\Rightarrow \text{гипербола.}$$

Уравнение линии пересечения гиперболоида с плоскостью $z=2$

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{x^2}{39}-\dfrac{z^2}{26}=1\\ z=2\end{array}\right\}\Rightarrow \text{эллипс, лежаший в плоскости } z=2\,.$$

Уравнение линии пересечения с плоскостью $x=3$

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{y^2}{12}-\dfrac{z^2}{6}=1\\ x=3\end{array}\right\}\Rightarrow \text{гипербола.}$$

Задачи для самостоятельного решения

7.1. Исследовать, какие геометрические образы определяются в пространстве следующими уравнениями:

1) $x^2+y^2=25$; 2) $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{16}=1$; 3) $y^2=8x$;

4) $x^2-y^2=0$; 5) $x^2+y^2+4=0$.

7.2. Составить уравнение сферы радиуса $R=5$ с центром в начале координат.

7.3. Составить уравнение сферы радиуса $R=3$ с центром в точке $C(-1;2;-3)$.

7.4. Определить координаты центра и радиус сферы

$$4x^2+4y^2+4z^2-4x+12y-16z+1=0.$$

7.5. Определить координаты центра и радиус сферы $x^2+y^2+z^2+x-y+z=0$.

7.6. Сфера имеет центр в точке $C(5;7;-1)$ и проходит через начало координат. Найти её уравнение.

7.7. Составить уравнение двухполостного гиперболоида вращения, полученного вращением гиперболы $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ \ y=0$ вокруг оси Oz.

7.8. Составить уравнение параболоида вращения, полученного вращением параболы $x^2=2z,\ y=0$ вокруг оси Oz.

7.9. Написать уравнение круглого цилиндра, если даны уравнения его оси $x=t,\ y=1+2t,\ z=-3-2t$ и точка $N(1;-2;1)$ на его поверхности.

7.10. В каких точках прямая

$$\frac{x-4}{2}=\frac{y+6}{-3}=\frac{z+2}{-2}$$

пересекает эллипсоид

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}=1?$$

7.11. В каких точках прямая

$$\frac{x-4}{4}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-2}{2}$$

пересекает однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1?$$

7.12. Составить уравнение сферы, если известно, что точки $M(2;5;-7)$ и $N(6;-1;3)$ – концы одного из её диаметров.

7.13. Составить уравнение сферы радиуса $R=9$, проходящей через точки $M_1(1;-2;-1)$, $M_2(-5;10;-1)$, $M_3(-8;-2;2)$.

7.14. Составить уравнение линии пересечение конуса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

с плоскостью $z=c$.

7.15. Написать уравнение сферы, которая касается прямой

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y+4}{6}=\frac{z-6}{4}$$

в точке $M(1;-4;6)$ и прямой

$$\frac{x-4}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-2}{-6}$$

в точке $N(4;-3;2)$.

7.16. Найти проекцию окружности

$$\begin{cases}(x-3)^2+(y-7)^2+(z+1)^2=25\,,\\ 2x-y-2z-10=0.\end{cases}$$

на плоскость xOz.

7.17. Исследовать линию пересечения гиперболоида

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-z^2=1.$$

с плоскостью $4x-3y-12z-6=0$, пользуясь её проекциями на координатные плоскости.

7.18. Найти точки пересечения поверхности:

1) $\dfrac{x^2}{4}+y^2-\dfrac{z^2}{9}=-1$ с прямой $x-3=y-1=\dfrac{z-6}{3}$;

2) $4z=x^2-4y^2$ с прямой $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-5}{-2}$.

7.19. Составить уравнение эллипсоида, осями симметрии которого служат оси координат, если на его поверхности лежат три точки $A(3;0;0)$, $B(-2;\frac{5}{3};0)$ и $C(0;-1;2\sqrt{5})$.

7.20. Найти точки пересечения трёх поверхностей:

1) $x^2+y^2+z^2=49,\quad y-3=0,\quad z+6=0.$

2) $x^2+y^2+z^2=9, x^2+y^2+(z-2)^2=5,\ y-2=0.$`

7.21. Установить, что плоскость $z+1=0$ пересекает однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{18}+\frac{z^2}{2}=1$$

по гиперболе; найти её полуоси и вершины.

7.22. Установить, что плоскость $y+6=0$ пересекает гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=6z$$

по параболе; найти её параметр и вершину.

7.23. Установить, при каких значениях m плоскость $x+mz-1=0$ пересекает двуполостный гиперболоид $x^2+y^2-z^2=-1$ а) по эллипсу, б) по гиперболе.

7.24. Доказать, что эллиптический параболоид

$$\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4}=2y$$

имеет одну общую точку с плоскостью $2x-2y-z-10=0$, и найти её координаты.

7.25. Доказать, что эллипсоид

$$\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{9}=1$$

имеет одну общую точку с плоскостью $4x-3y+12z-54=0$, и найти её координаты.

Ответы

7.1.

1) Цилиндрическая поверхность с образующими, параллельными оси Oz, и имеющая направляющую окружность $x^2+y^2=25$.

2) Цилиндрическая поверхность с образующими, параллельными оси Oy. Направляющая – гипербола

$$\frac{x^2}{25}-\frac{z^2}{16}=1.$$

3) Цилиндрическая поверхность с образующими, параллельными оси Oz. Направляющая – парабола $y^2=8x$.

4) Пара плоскостей $x-y=0, x+y=0$.

5) Этому уравнению координаты ни одной точки пространства не удовлетворяют.

7.2. $x^2+y^2+z^2=25$; **7.3.** $x^2+y^2+z^2+2x-4y+6z-5=0$;

7.4. $C\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2};2\right)$, $R=\frac{5}{2}$. **7.5.** $C\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$, $R=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

7.6. $x^2+y^2+z^2-10x-14y+2z=0$.

7.7. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$; **7.8.** $x^2+y^2=2z$;

7.9. $8x^2+5y^2+5z^2-4xy+8yz+4xz+16x+14y+22z-39=0$;

7.10. $M_1(2;-3;0)$, $M_2(0;0;2)$. **7.11.** $M_1(4;-3;2)$, $M_2(12;3;6)$.

7.12. $(x-4)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=38$.

7.13. $(x+2)^2+(y-4)^2+(z-5)^2=81$.

7.14. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad z=c$; **7.15.** $(x+5)^2+(y-3)^2+z^2=121$.

7.16. Эллипс: $5x^2+5z^2-8xz-74x+70z+274=0$.

7.17. Данная плоскость касается поверхности в точке $(6;-2;2)$.

7.18. 1). $M(4;2;9)$ – прямая касается поверхности.

2). $M_1(4;1;3)$ – прямая параллельна одной из асимптот.

7.19. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{1}=1$.

7.20. 1). $(2;3;-6)$, $(-2;3;-6)$.

2). $(1;2;2)$, $(-1;2;2)$. **7.21.** $4;3;(4;0;-1)$, $(-4;0;-1)$.

7.22. $15; \left(0; -6; -\frac{3}{2}\right)$. **7.23.** а) $1 < |m| < \sqrt{2}$; б) $|m| < 1$.
7.24. $(9; 5; -2)$. **7.25.** $(6; -2; 2)$.

Приложение
Элементы аналитической геометрии в экономике

Успешное решение многих вопросов экономики осуществляется с помощью математики. Существует два взгляда на математику и её роль среди других наук в процессе обучения. Согласно первому, математика – это нечто самостоятельное, самоценное. Те, кто придерживаются второго взгляда, признают это, но в основном считают математику инструментом, владение которым полезно и необходимо. Несомненно, математика имеет определённое мировоззренческое значение, но для специалистов по экономике, управлению – «менеджеров» математика является в большей мере инструментом анализа, организаций, управления. Поэтому рассмотрим описание некоторых идеализированных экономических ситуаций с привлечением математического аппарата. Математизация процессов хороша тем, что она позволяет экономическую ситуацию перевести на язык математики, решить задачу и вернуться к экономической интерпретации ситуации.

1. Пространство товаров, вектор цен

Под товаром понимают некоторое благо или услугу поступившие в продажу в определенное время и в определенном месте. Будем считать, что имеется n различных товаров, количество i –то товара обозначается x_i, тогда некоторый набор товаров обозначается X=$(x_1,\cdots,x_n)$, т.е. является $n-$мерным вектором. Будем рассматривать, как правило, только неотрицательное количество товаров, так что для любого $i=1,\cdots,n$ $x_i\geq 0$ или $X\geq 0$. Множество всех наборов товаров называется *пространством товаров* C. Это множество называется пространством потому, что в нем можно сложить любые два набора и умножить любой набор товаров на любое неотрицательное число. Возможность умножения набора товаров на любое неотрицательное число отражает предположение о безграничной делимости и умножении товаров (т.е. товары устроены на подобие сахарного песка, а не авианосцев).

В дальнейшем предполагаем , что каждый товар имеет *цену*. Все цены предполагаются строго положительными. Пусть цена единицы i –го товара есть p_i, тогда вектор $P=(p_1,\cdots,p_n)$ есть *вектор цен.*

Набор товаров, как вектор, имеет ту же размерность, что и вектор цен. Для набора товаров $X=(x_i)$ и вектора цен $P=(p_i)$ их скалярное произведение $P\cdot X=p_1x_1+\cdots+p_nx_n$ есть число, называемое *ценой набора* или его *стоимостью,* и будет обозначаться $C(X)$.

2. Технологическая матрица и задача оптимального планирования

Матрицы широко используются во всех областях науки, в том числе в экономической. Многие обозначения при использовании матриц очень компактны, при этом без потери в наглядности и содержательности. Для примера рассмотрим так называемую технологическую матрицу.

Пусть предприятие из m видов ресурсов производит n видов продукции. Предположим, что для производства одной единицы (ед.) j –го вида продукции расходуется a_{ij} ед. i – го вида ресурса, т.е. a_{ij} –норма расхода i –го ресурса на производство j –й продукции. Матрица $A = (a_{ij})$, составленная из норм расхода, называется *матрицей норм расхода*. *Технологической* же её называют вот почему. Рассмотрим какой-нибудь, например j –й столбец A_{ij} этой матрицы. Этот столбец полностью описывает расход ресурсов на производство 1 ед. j –й продукции. Говоря абстрактно, для получения 1 ед. j –й продукции надо «смешать» a_{1j} ед. 1-го ресурса, a_{2j} ед. и 2 – го т.д. Такое «смешивание» вполне правильно назвать технологией переработки ресурсов. Таким образом, j –й столбец матрицы A описывает j –ю технологию переработки ресурсов. Элементы i –й строки описывают расход i –го ресурса на единицу каждой продукции или при единичной интенсивности каждой технологии. Всего предприятие располагает n технологиями.

Рассмотрим план производства x_1. ед. 1 – й продукции, x_2 ед. 2 – й и вообще x_j ед. j –й продукции. Такой план представим вектором – столбцом $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Заметим, что для осуществления такого плана понадобится

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j,$$

ед. 1 – го ресурса

$$\sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j,$$

2 – го и вообще ……..

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j.$$

ед. i –го ресурса. Оказывается, что такие количества ресурсов есть компоненты вектора – столбца AX, если выполнить умножение матрицы A норм расхода слева на вектор – столбец X плана производства справа.

Введем еще величину *удельной прибыли* c_j – это прибыль от реализации одной единицы j –й продукции. Запишем все эти удельные прибыли в виде вектора – строки $C = (c_1 \cdots c_n)$. Тогда скалярное произведение CX представляет собой величину прибыли, полученной при реализации X ед. произведенной продукции. Обозначим эту прибыль $P(X)$.

Пусть b_i означает количество единиц i –го ресурса, запасенного на складе. Запишем эти величины запасов в виде вектора – столбца $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

Тогда матрично – векторное неравенство $AX \le B$ означает необходимость учитывать ограниченность запасов ресурсов при рассмотрении планов производства. Если это неравенство выполняется, значит, для X хватит имеющихся запасов ресурсов B и такой план является реальным, или, как говорят, допустимым.

Рассмотрим следующую задачу оптимального планирования: *найти такой план производства, который бы был допустимым и обеспечивая наибольшую прибыль из всех допустимых планов.*

Эту задачу символически записывают так:

$$P(X) = C \cdot X \to max,$$
$$AX \le B,$$
$$X \ge 0.$$

Обозначим множество всех планов X, удовлетворяющих условиям: $X \ge 0$, $AX \le B$, через D и назовём это множество *допустимым.* Тогда указанную выше задачу можно сформулировать так: найти максимум функции прибыли $P(X)$ на множестве D допустимых планов.

Пример 1. Предприятие выпускает продукцию трёх видов P_1, P_2, P_3 и использует сырьё двух типов: S_1 и S_2. Нормы расхода сырья характеризуются матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, где каждый элемент $a_{ij} (i = 1,2,3; j = 1,2)$ показывает, сколько единиц сырья j – го типа расходуется на производство единицы продукции i – го вида. План выпуска продукции задан матрицей – строкой $C = (50 \;\; 100 \;\; 120)$, стоимость единицы каждого типа сырья (ден. ед.) – матрицей – столбцом $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Определить затраты сырья, необходимые для планового выпуска продукции, и общую стоимость сырья.

Р е ш е н и е. Затраты 1 – го сырья составляют

$S_1 = 1 \cdot 50 + 3 \cdot 100 + 5 \cdot 120 = 950$ ед.

2 – го - $S_2 = 4 \cdot 50 + 2 \cdot 100 + 3 \cdot 120 = 760$ ед., поэтому матрица – строка затрат сырья S может быть записана как произведение

$$S = C \cdot A = (50 \ \ 100 \ \ 120)\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = (950 \ \ 760).$$

Тогда общая стоимость сырья

$Q = 950 \cdot 20 + 760 \cdot 30 = 41800$ ден. ед. может быть записана в матричном виде

$Q = S \cdot B = (CA)B = 41800.$

3. Линейные функции спроса и предложения, определение равновесной цены

Здравый смысл подсказывает, что между предложением (s), спросом (d) и ценной (p) товара существуют зависимости, которые в первом приближении можно описать линейными функциями.

Рассмотрим какой-нибудь товар. При данной цене p за единицу товара обозначим $D(p)$ число единиц товара, которые покупатели на рынке желают купить. Эта функция $D(p)$ называется *функцией спроса на товар.* Она убывающая, т.к. с ростом цены на продукцию количество проданной продукции уменьшается, и в первом приближении функцию спроса можно задать убывающей линейной функцией (Рис.1), описываемой уравнением

$$P = md + n, \quad D = P.$$

где d – спрос. Очевидно, что $m < 0$.

С другой сторон, пусть $S(p)$ – число единиц товара, которые предлагают продавцы для продажи на рынке. Эта функция называется *функцией предложения товара.* Она возрастающая, т.к. с возрастанием цены на товар возрастает предложение товара, т.е. возрастает число производителей, стремящихся предложить этот товар. Поэтому линейная функция (кривая предложения)

$$P = ks + b,$$

где s –(supply) – предложение.

Кривая предложения является возрастающей функцией $(k > 0)$ (Рис. 2). Её можно назвать моделью связи цены и предложения товара.

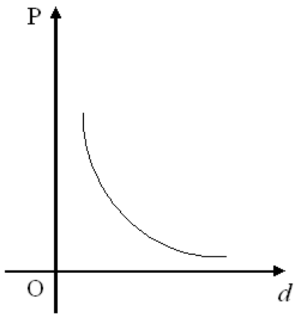


Рис. 1

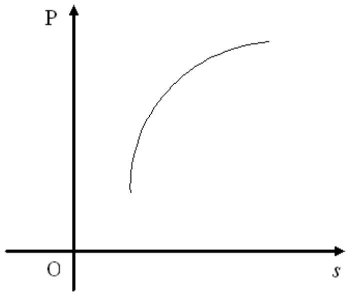


Рис. 2

Точка пересечения кривых спроса и предложения – точка равновесия, а соответствующая ей цена – равновесная цена P_0. В точке равновесия спрос и предложение равны. Это значит, что весь произведенный товар находит своих покупателей, и все покупатели удовлетворены.

Количество произведенного и приобретенного товара измеряется в одних и тех же единицах (штуках, по весу и т.д.), а потому обе кривые можно строить в одних и тех же координатах – системе QoP, где Q – количество товара (Рис. 3).

Легко прослеживается отклонение рыночной цены P_1 от равновесной P_0. Если $P_1 > P_0$, то количество товара $Q_1 > Q_0$, т.е. предложение превышает спрос. При этом излишки продукции оседают на складах. Но это побуждает производителей снизить цену, т.е. рыночная цена приблизится к равновесной.

Пусть $P_1 < P_0$. В этом случае спрос превышает предложение. Поэтому производители повышают цену, рыночная цена P_1 стремится к равновесной цене P_0. Предположим, что функции спроса и предложения линейны. Например, пусть $D(p) = 40 - p$, $S(p) = -20 + 2p$. Равновесная цена p^* находится из решения уравнения: $40 - p = -20 + 2p$, т.е. $p^* = 20$.

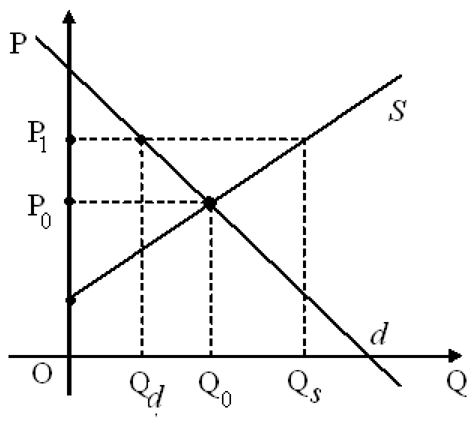


Рис. 3

В общем случае спрос и предложение задаются в виде более сложных функциональных зависимостей, но суть процесса аналогична рассмотренному случаю.

Пример 2. Издержки перевозки y двумя видами транспорта выражаются уравнениями $y = 150 + 50x$ и $y = 250 + 25x$, где x – расстояние в сотнях километров; y – транспортные расходы. Начиная с какого расстояния более экономичен второй вид транспорта?

Р е ш е н и е. Точка $M(x_0; y_0)$ пересечения двух прямых выражает равные издержки двумя видами транспорта. Решая совместно систему двух прямых

$$\begin{cases} y = 150 + 50x, \\ y = 250 + 25x, \end{cases}$$

получим $x_0 = 4$; $y_0 = 350$. Поскольку x выражает расстояние в сотнях километров, то очевидно, что при расстоянии $x > 400$ км второй вид транспорта является более экономичен.

Ответ: $x = 400$ км.

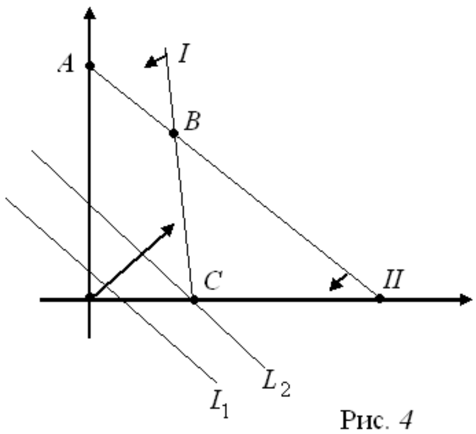


Рис. 4

4. Решение задач линейного программирования (ЛП) с двумя переменными графическим методом

Решим следующую задачу ЛП $S(x_1, x_2) = 2x_1 + 2x_2 \to max,$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 6, & I \\ x_1 + 2x_2 \le 6, & II \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

На плоскости возьмем систему координат (Рис.4). Начало – в точке $O(0,0)$, ось x_1 направим вправо горизонтально, ось x_2 – вертикально вверх. Неравенству I удовлетворяют точки полуплоскости, и граница этой полуплоскости есть прямая линия $3x_1 + x_2 = 6$. Проще всего эту прямую построить по точкам пересечения её с осями координат. Это точки $(2,0)$ и $(0,6)$. Чтобы узнать нужную полуплоскость, надо подставить в неравенство I координаты какой-нибудь точки, не лежащей на прямой, например точки $O(0,0)$. Неравенство верно, значит, искомой полуплоскостью I является та, в которой находится точка $O(0,0)$. Это показываем стрелкой.

Аналогично поступаем со вторым ограничением. Получаем еще одну полуплоскость – II. Не отрицательность каждой переменной даёт ещё две полуплоскости – правую от вертикальной оси и верхнюю от горизонтальной оси. Пересечение всех четырёх полуплоскостей даёт искомое допустимое множество – четырёхугольник $OABC$. Теперь на нём найдем максимум целевой функции $S(x_1, x_2)$. Максимума, можно достигать в какой – то из угловых точек O, A, B, C. Координаты точек O, A, C легко находятся: $O(0,0)$, $A(0,3)$, $C(2,0)$. Для нахождения координат точки B надо решить систему двух уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 6, \\ x_1 + 2x_2 = 6. \end{cases}$$

Решая, находим: $x_1 = {}^6/_5$, $x_2 = {}^{12}/_5$. Теперь вычислим значения целевой функции в этих точках: $S(O) = 0$, $S(A) = 6$, $S(B) = 36/5$, $S(C) = 4$. Видим, что максимум равен $36/5$ и достигается он в точке $B(6/5, 12/5)$.

Однако обычно экстремум находят не перебором угловых точек.

Рассмотрим линию L_2, заданную уравнением $2x_1 + 2x_2 = e$, т.е. $S(x_1, x_2) = e$. Заметим, что в каждой точке L_2 значение функции S одно и то же, а именно e. Поэтому линия L_e так и называется – *линия уровня* e функции S. На рис.4 показаны две линии уровня: L_1 и L_2. Заметим, что линии уровня не пересекаются и в данном случае они все – параллельные прямые линии, перпендикулярные своему нормальному вектору $\boldsymbol{n} = (2,2)$. Этот нормальный вектор показывает направление, в котором значения функции S возрастает. Поэтому в поисках максимума надо двигать линию уровня в направлении нормального вектора. При этом значения исследуемой функции будут возрастать. Последняя точка, по которой линия уровня ещё пересекает допустимое множество и будет точкой максимума. В нашем случае это точка B. Итак, ответ: $x_1 = {}^6/_5$, $x_2 = {}^{12}/_5$; максимум функции S равен $36/5$.

Если в задаче нужно было найти минимум линейной функции, то линию уровня надо было двигать в сторону, противоположную направлению нормального вектора.

Из общих теорем математического анализа вытекает, что если допустимое множество в задаче ЛП ограниченное, то целевая функция имеет на нем и минимум, и максимум. Если же допустимое множество неограниченно, то экстремума может и не быть, и тогда задача ЛП не имеет решения.

5. Основные термины и определения

Адекватность модели – соответствие модели изучаемому объекту.
Акция – документ (ценная бумага), удостоверяющий факт вложения

денежных средств в капитал акционерного общества.

Амортизация – постепенное перенесение стоимости средств труда по мере их износа на производимый продукт.

Балансовая система уравнений – равенство между наличием ресурсов и их расходом.

Биржа фондовая – организованный рынок ценных бумаг.

Биржевая котировка – цена товара, установленная на бирже.

Депозит – финансовые средства, помещенные вкладчиком в кредитные учреждения для получения.

Дивиденд – доход, получаемый владельцем ценных бумаг.

Доход (выручка) валовой (общий) предприятия - полная выручка, получаемая предприятием в результате реализации своей продукции. Он равен $D = C_0 \cdot q$, где C_0 – рыночная цена выпускаемой продукции, q – общий объём этой продукции.

Динамический процесс – процесс, осуществляемый с течением времени.

Дискретная переменная величина – величина, принимающая отдельные числовые значения.

Дисконтная политика – метод государственного регулирования конъюнктуры рынка. Суть политики в том, что изменяется учетная ставка процента по кредитам, которые государственный банк представляет кредитным учреждениям.

Издержки валовые (общие) – суммарные затраты предприятия на выпуск продукции.

Инвестиции – вложение средств в предприятие с целью получения дохода.

Инвестор – субъект, осуществляющий инвестиции.

Инфляция – рост уровня цен на товары или продукты, вызванный увеличением той денежной массы в сфере обращения, которая не обеспечена товарным покрытием.

Коэффициент эластичности спроса от дохода – величина, показывающая относительное изменение спроса при изменении дохода.

Кривая:

- **безразличия** – кривая, являющаяся графическим изображением связи двух потребительских лаг;
- **спроса –** график функции зависимости спроса на товар от уровня его цены.

Конъюнктура – конкретные условия экономического процесса воспроизводства, сложившаяся ситуация.

Макроэкономика – раздел экономической науки, изучающий экономические процессы на уровне народного хозяйства в целом.

Маркетинг – совокупность мероприятий, анализирующих состояние рынка так, чтобы воздействовать на потребительский спрос с тем, чтобы увеличить сбыт товаров.

Микроэкономика – раздел экономической науки, изучающий экономические процессы на локальном уровне.

Модель математическая – идеализированный образ изучаемого процесса или объекта, воплотивший основные его свойства, записанный на языке математики.

Монополия – состояние рынка, когда действует только один продавец.

Полезность товара – удовлетворение, получаемое при потреблении данного товара.

Прибыль:

- **валовая –** разность между совокупностью доходов и расходов предприятия до уплаты налогов.
- **чистая –** остаток валовой прибыли после уплаты налогов.

Расходы на потребление – часть валового национального продукта, представляющая затраты потребителей на личные нужды.

Сбережения – та часть дохода, которая не предназначена на приобретение товаров и услуг, а остается неприкосновенной.

Синергические связи – те связи в системе, при наличии которых действие объединенной совокупности объектов даёт больший эффект, чем сумма отдельных объектов.

Спрос на деньги – потребность рынка в денежных средствах.

Статический процесс – процесс, осуществляемый в определённый момент времени.

Ставка (норма) процента – уровень банковского процента за кредит.

Функция сбережений – функция зависимости объёма сбережении от уровня доходов.

Цена:

- **предложения –** цена товара, предлагаемая продавцом;
- **спроса –** цена товара, предлагаемая покупателем.
- **равновесная –** цена товара, при которой спрос равен предложению.

Фондоотдача – показатель эффективности производства, характеризующий объём валовой или товарной продукции в расчёте на единицу основных и оборотных фондов, затраченных на её производство.

Чистый национальный продукт – показатель объёма производства (дохода), равен разности валового национального продукта и амортизации.

Эластичность спроса по цене - отношение процентного изменения количества покупаемого товара к проценту изменения цены товара.

Эмиссия денег – выпуск центральным банком в обращение денег для обеспечения рынка.

Экзогенные переменные – переменные, заданные извне, т.е. уже известные к началу изучения системы.

Эндогенные переменные – переменные, полученные в процессе решения задачи.

Литература

1. Александров П. С. Лекции по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1968. – 919 с.
2. Базылев В. Г., Дуничев К. И., Иваницкая В. П. Геометрия – М.: Просвещение, ч.1, 1974. – 351 с.
3. Бахвалов С. В., Бабушкин Л. И., Иваницкая В. П. Аналитическая геометрия. – М.: Просвещение, 1970.
4. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1976. – 319 с.
5. Валеев К. Г., Джалладова І. А. Вища математика: Навч. посібник: У 2-х ч. – Киев: КНЕУ, 2001. – ч.1. – 546 с.
6. Высшая математика для экономистов. / Под ред. Н. Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2003. – 471 с.
7. Герасимчук В.С., Васильченко Г.С., Кравцов В.И. Курс классической математики в примерах и задачах. – М.: Физматгиз, т.1, 2008 – 672 с.
8. Григулецкий В. Г., Ященко З. В. Высшая математика для экономистов. – Ростов на дону: Феникс, 2004. – 640 с.
9. Гуревич В. Б., Минорский В. П. Учебник аналитической геометрии. – М.: Наука, 1968. – 163 с.
10. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высшая школа, ч.1, 1974. – 416 с.
11. Ефимов Н. В. Краткий курс аналитической геометрии. – М.: Гостехиздат, 1960.
12. Игнатьева А. В., Краснощекова Т. И., Смирнов В. Ф. Курс высшей математики. – М.: Высшая школа, 1968. – 692 с.
13. Каплан И. А. Практические занятия по высшей математике. – Харьков: Госуниверситет, 1970. Ч. 1. – 575 с.
14. Клименко Ю. И. Высшая математика для экономистов в примерах и задачах. – М.: Экзамен, 2006. – 734 с.
15. Курбаншоев С. З. Лекции по линейной алгебре. – Душанбе: РТСУ, 2010. – 277 с.
16. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1965. – 431 с.
17. Минорский В. П. Сборник задач по высшей математике: Учебное пособие для втузов. – М.: Наука, 1987. – 352 с.
18. Моденов П. С., Пархоменко А. С. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1976. – 384 с.

19. Мусхелишвили Н. И. Курс аналитической геометрии. – М.: ГИТТЛ, 1967. – 655 с.
20. Натансон И. П. Краткий курс высшей математики. – М.: Наука, 1968, - 727 с.
21. Общий курс высшей математики для экономистов. / Под ред. В. И. Ермакова. – М.:ИНФРА – М., 2007. – 656 с.
22. Письменный Д. Т. Конспект лекции по высшей математике. – М.: Айрис – пресс, 2009. – 608 с.
23. Погорелов А. В. Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1966. – 272 с.
24. Привалов И. И. Аналитическая геометрия. – М.: наука, 1966. – 272 с.
25. Рубан П. И., Гармаш Е. Е. Руководство к решению задач по аналитической геометрии. – М.: Высшая школа, 1963. – 314 с.
26. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. / Под ред. А. П. Рябушко. – Минск: Высш. школа, ч.1, 1991 – 268 с.
27. Сборник задач по курсу высшей математике. / Под ред. Г. И. Кручковича. – М.: Высшая школа, 1973. – 576 с.
28. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1970. – 336 с.